

1917.

No. 12.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. Poggendorff, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE,

VIERTE FOLGE.

Band 53. Heft 12.

DER GANZEN REIHE 358. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1917.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.
(Ausgegeben am 14. Dezember 1917.)



Inhalt.

	Seite
1. A. Rubinowicz. Die Beugungswelle in der Kirchhoff'schen Theorie der Beugungerscheinungen	257
2. Minna Lang. Untersuchungen über die Absorption harter Röntgenstrahlen in Gasen. (Hierzu Tafel III.)	279
3. H. Kohn. Die Lichtstärke des schwarzen Körpers in Hefnerkerzen und die Strahlungskonstanten der Glühlampenkohle	320

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleleherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.





ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungerscheinungen;*
von A. Rubinowicz.

Inhaltsübersicht: Einleitung. — § 1. Umformung des Kirchhoff'schen Beugungintegrals. — § 2. Struktur der elementaren Beugungswelle. — § 3. Analytische Fortsetzungen der Kirchhoff'schen Lösung. — § 4. Verhalten der Kirchhoff'schen Lösung am schwarzen Schirme. Beugung am vollkommen blanken Schirme. — § 5. Ausstrahlungsbedingung. Eindeutigkeit. — § 6. Die Kirchhoff'sche Lösung des Beugungsproblems für eine unendliche Halbebene. — § 7. Das Sommerfeldsche Beugungsproblem. — § 8. Vergleich der beiden Beugungstheorien. Die elementare Beugungswelle für die Sommerfeldsche Lösung.

Der erste Versuch, auf Grund der Wellentheorie des Lichtes eine Erklärung der Beugungssphänomene zu geben, röhrt von Thomas Young (1802) her, der diese Erscheinung auf die Interferenz einer direkt einfallenden mit einer von der Schirmkante ausgehenden Lichtwelle zurückführte. Da aber die Lage der so berechneten Beugungsstreifen mit der Erfahrung nicht völlig übereinstimmte, sah sich August Fresnel (1816) veranlaßt, durch eine Erweiterung des Huygensschen Prinzipes für die Theorie der Beugung ein neues Fundament zu schaffen, das später von Kirchhoff mit Hilfe der Theorie der Wellengleichung noch fester begründet wurde. Die schließlich von Sommerfeld¹⁾ (1894) gegebene, völlig strenge Lösung des Beugungsproblems für eine blanke Halbebene zeigte dann, daß in diesem Spezialfalle einerseits die nach dem Kirchhoff'schen Verfahren gewonnenen Formeln für nicht zu große Beugungswinkel quantitativ hinreichend genau sind und andererseits sich in diesem Falle, in qualitativer Übereinstimmung mit der Youngschen Vorstellung, eine einfallende und eine von der beugenden Kante ausgehende zylindrische Beugungswelle unterscheiden

1) A. Sommerfeld, Math. Ann. 47. p. 317. 1896 und Zeitschr. f. Math. u. Phys. 46. p. 11. 1901. Diese Arbeiten werden im folgenden mit S. I und S. II bezeichnet.

läßt. Übrigens wird das Vorhandensein einer solchen Beugungswelle auch aus einzelnen nach dem Kirchhoffschen Verfahren gewonnenen Lösungen plausibel.¹⁾ Maey²⁾ hat auch für den Fall der Halbebene direkt von der Kirchhoffschen Lösung die Beugungswelle abspalten können.

Gleichwohl ist es interessant, zu sehen, daß die Youngsche Theorie vom leuchtenden Schirmrande sich in den nach Kirchhoff behandelten Spezialfällen nicht nur zufällig bestätigt. Wie wir nämlich zeigen wollen, läßt sich die Funktion, die durch das von Kirchhoff benutzte Flächenintegral dargestellt wird, durch eine einfache Umformung spalten in eine im Sinne der geometrischen Optik zu definierende *einfallende Lichtwelle* und in eine vom Schirmrande ausgehende *Beugungswelle*. Dabei kann man sich die Beugungswelle nach einem Elementargesetze entstanden denken, welches jedem Punkte des Schirmrandes eine, allein durch die geometrische Lage des betreffenden Randelementes und der Lichtquelle bestimmte, unsymmetrische Kugelwelle zuordnet. Man überzeugt sich sodann, daß sich die Kirchhoffsche Lösung durch eine reguläre, gemäß der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

erfolgende Fortsetzung überall im Raum, wo sich der physikalische Vorgang abspielt, definieren läßt, was die Feststellung der analytischen Eigenschaften des Kirchhoffschen schwarzen Schirmes ermöglicht. Schließlich wird noch mit Benutzung der gegebenen Umformung des Kirchhoffschen Integrals die Beugung an einer Halbebene behandelt, und es zeigt sich, daß die so erhaltene Lösung mit der strengen Sommerfeldschen sehr nahe verwandt ist, ja daß sie geradezu aus den Bausteinen der letzteren sich zusammensetzen läßt.

§ 1. Umformung des Kirchhoffschen Beugungsintegrals.

Die wesentlichsten Tragsäulen der Kirchhoffschen Beugungstheorie sind die folgenden Tatsachen und Annahmen:

$u(x, y, z)$ sei eine in einem Bereich G einmal stetig differentierbare Lösung der Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Optik. Leipzig 1891. p. 133.

2) E. Maey, Ann. d. Phys. 49. p. 69. 1893.

Mit u und $\bar{u}/\partial n$ mögen an der Begrenzung (G) des Gebietes G die Werte der Funktion u bzw. die ihrer Ableitung nach der inneren Normalen n bezeichnet werden. Es stellt dann das über (G) erstreckte Flächenintegral

$$(1) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_G \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right\} df$$

eine in dem x, y, z -Raume diskontinuierliche Funktion dar, die innerhalb G gleich u und außerhalb dieses Gebietes gleich Null ist. Werden aber in dem Integral (1) für die Randwerte \bar{u} und $\partial \bar{u}/\partial n$ Funktionen gewählt, die nicht einer in G regulären Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ entnommen wurden, so stellt zwar der Ausdruck (1) eine in G reguläre Lösung der Schwingungsgleichung dar, die ihr auf (G) entsprechenden Grenzwerte von u und $\partial u/\partial n$ sind aber im allgemeinen von den in (1) eingesetzten Werten \bar{u} und $\partial \bar{u}/\partial n$ verschieden.

Kirchhoff macht nun die (qualitativ durch die Kleinheit der Wellenlänge nahegelegte, quantitativ aber doch nur allein durch den Enderfolg zu rechtfertigende) Annahme, daß an der beschatteten Seite des Schirmes S die Lichtausbreitung durch das Integral

$$(2) \quad u = \frac{1}{4\pi} \iint_F \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right\} df$$

gegeben wird, wo F die Beugungsöffnung, d. h. irgendeine den beugenden Schirmrand B überspannende Fläche ist. Für \bar{u} und $\partial \bar{u}/\partial n$ sind hier die Werte jener Funktion zu nehmen, die bei Abwesenheit des beugenden Schirmes die Ausbreitung des Lichtes darstellt. Ist also, wie wir dies im folgenden annehmen wollen, die Lichtquelle L punktförmig und im Endlichen gelegen, so werden \bar{u} und $\partial \bar{u}/\partial n$ durch die Funktion $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ bestimmt, wo ϱ die Entfernung von L bedeutet.

Das Integral (2) — wir wollen es in der Folge das Kirchhoffsche Beugungsintegral nennen — soll nun einer Umformung unterzogen werden. K sei die der geometrischen Schattengrenze entsprechende Fläche. Sie besteht aus allen an der Schattenseite des Schirmes gelegenen Punkten einer Kegelfläche, die eine durch den Lichtpunkt L hindurchgehende Gerade beim Umlaufen des beugenden Schirm-

randes B erzeugt. Nehmen wir nun in dem über F und K erstreckten Integral (1) die Randwerte a und $\frac{\partial u}{\partial n}$ so an, wie dies der Funktion $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ entspricht, so erhalten wir eine diskontinuierliche Funktion

$$(3) \quad u_E = \frac{1}{4\pi} \iint_{F+K} \left\{ \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \right\} df,$$

die nach (1) überall in dem „direkt beleuchteten“ von F und K begrenzten Raume R mit $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ identisch ist, außerhalb R aber verschwindet. u_E („einfallendes u “) stellt somit an der von der Lichtquelle abgewandten Seite des Schirmes eine Lichtverteilung dar, wie man sie bei Außerachtlassung der Beugungerscheinungen nach der geometrischen Optik erwartet. Beachten wir, daß K von den Kugelflächen $\varrho = \text{const}$ senkrecht geschnitten wird und demnach hier

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} \right) = 0$$

und daß ferner

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \cos(nr) = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} \cos(nr)$$

ist, so erhalten wir aus (3) für das Kirchhoffsche Beugungsintegral (2) den Ausdruck

$$(4) \quad u = u_E - \frac{1}{4\pi} \iint_K \frac{e^{ik(\varrho+r)}}{\varrho} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \cos(nr) df.$$

Es erübrigt jetzt noch, das hier auftretende Flächenintegral, das wir in der Folge mit u_B („gebeugtes u “) bezeichnen wollen, durch eine Integration auf ein über den beugenden Rand B erstrecktes Linienintegral zurückzuführen. Als orthogonale Flächenkoordinaten wählen wir auf K die Entfernung von der Lichtquelle L , nämlich ϱ , und die Schnittlinien σ der Fläche K mit den Kugelflächen $\varrho = \text{const}$. Bezeichnen wir ein Linienelement von B mit ds und seine Entfernung von L mit ϱ_s , so ist (vgl. Fig. 1)

$$d\sigma = \frac{\varrho}{\varrho_s} \sin(\varrho_s, ds) ds$$

und daher

$$df = d\varrho d\sigma = \frac{\varrho}{\varrho_s} \sin(\varrho_s, ds) d\varrho ds.$$

Ist ferner r_s die Entfernung zwischen ds und dem betrachteten Aufpunkte P , so gilt auf jeder durch L und ds hindurchgehenden Geraden:

$$r^2 = r_s^2 + (\varrho - \varrho_s)^2 + 2 r_s (\varrho - \varrho_s) \cos (\varrho_s, \varrho_s).$$

Da nun offenbar die Projektionen von r und r_s , die beide zu einer Geraden $Ld\sigma$ gehören, auf das von P auf $Ld\sigma$ gefällte Lot einander gleich sind, so ist

$$\cos (n, r) = \frac{r_s}{r} \cos (n, r_s).$$

Als Winkel (ϱ_s, ds) , (r_s, ϱ_s) , (n, r) , (n, r_s) sind dabei die Absolutbeträge der kleinsten Winkel zwischen den positiven Richtungen der betreffenden Geraden zu nehmen. Das umzuformende Doppelintegral u_B lautet demnach:

$$u_B = - \frac{1}{4\pi} \int_B ds \sin (\varrho_s, ds) \cos (n, r_s) \frac{r_s}{\varrho_s} \int_{\varrho_s}^{\infty} d\varrho e^{ik(\varrho + r)} \left(\frac{ik}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\varrho_s}^{\infty} e^{ik(\varrho + r)} \frac{ik}{r^3} d\varrho &= \int_{\varrho_s}^{\infty} \frac{d}{d\varrho} \left(e^{ik(\varrho + r)} \right) \cdot \frac{1}{(1 + [dr/d\varrho])r^3} d\varrho \\ &= \int_{\varrho_s}^{\infty} \frac{d}{d\varrho} \left(e^{ik(\varrho + r)} \right) \frac{1}{(r + \varrho - \varrho_s + r_s \cos [\varrho_s, \varrho_s])r} d\varrho, \end{aligned}$$

und da ferner, wovon man sich leicht überzeugt,

$$\frac{d}{d\varrho} \frac{1}{(r + \varrho - \varrho_s + r_s \cos [\varrho_s, \varrho_s])r} = - \frac{1}{r^3},$$

so ist

$$\begin{aligned} \int_{\varrho_s}^{\infty} e^{ik(\varrho + r)} \left(\frac{ik}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) d\varrho &= \int_{\varrho_s}^{\infty} \frac{d}{d\varrho} \left(e^{ik(\varrho + r)} \frac{1}{(r + \varrho - \varrho_s + r_s \cos [\varrho_s, \varrho_s])r} \right) d\varrho \\ &= - \frac{e^{ik(\varrho_s + r_s)}}{r_s^3 (1 + \cos [\varrho_s, \varrho_s])}. \end{aligned}$$

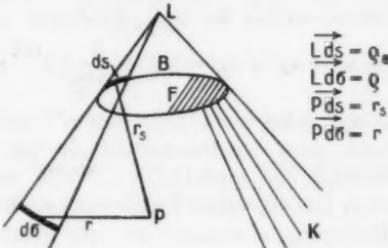


Fig. 1.

Es wird daher schließlich

$$(5) \quad u = u_E + u_B = u_E + \frac{1}{4\pi} \int_B e^{ik\varrho_s} \cdot \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cdot \frac{\cos(n, r_s)}{1 + \cos(r_s, \varrho_s)} \sin(\varrho_s, ds) ds,$$

Für den Fall, daß die Beugungerscheinungen durch eine ebene Welle e^{ikx} bedingt werden, führen die vorangehenden Betrachtungen zu dem Ausdruck

$$(5a) \quad u^* = u_E^* + u_B^* = u_E^* + \frac{1}{4\pi} \int_B e^{ikf_s} \cdot \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cdot \frac{\cos(n, r_s)}{1 + \cos(r_s, x)} \sin(x, ds) ds,$$

wo u_E^* jetzt mit Hilfe von e^{ikx} zu bilden ist und f_s den Abstand eines Randelementes ds von einer zur Fortschreitungsrichtung der einfallenden Welle senkrechten und im Raum festen Ebene, einer Phasenebene, bedeutet. Bei den folgenden Überlegungen werden wir uns aber ausschließlich auf die allgemeinere Formel (5) beziehen.

§ 2. Struktur der elementaren Beugungswelle.

Die Darstellung der Beugungerscheinungen durch das Kirchhoffsche Beugungsintegral (2) ging von der Erfahrung aus und wurde auch an ihr durch Versuche erprobt. In einer ebensolchen Beziehung zur Erfahrung steht selbstverständlich auch seine hier gegebene Umformung (5), die, wie leicht einzusehen ist, qualitativ der Youngschen Vorstellung von dem Entstehen der Beugungerscheinungen entspricht und die mithin als eine auf empirischer Basis ruhende quantitative Präzisierung dieser Anschauung gelten kann. Es entsprechen nämlich die beiden Bestandteile, u_E und u_B , in der Funktion (5), die zunächst ebenso wie das mit ihr identische Integral (2) nur an der Schattenseite des Schirmes den Beugungsvorgang darstellen will, unmittelbar der einfallenden und der gebeugten Welle. Bezuglich u_E ist dies in der Tat nach dessen Herstellungsart klar, und was u_B betrifft, so entsteht dieses durch Superposition der Kugelwellen

$$(6) \quad du_B = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\varrho_s}}{\varrho_s} \cdot \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cdot \frac{\cos(n, r_s)}{1 + \cos(r_s, \varrho_s)} \sin(\varrho_s, ds) ds$$

die alle ihren Ursprung in den einzelnen Punkten des beugenden Randes B haben.¹⁾ Da ein jedes du_B durch die geometrische

1) Der experimentelle Nachweis für die Existenz der Beugungswellen ist von A. Kalaschnikoff (Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 44, phys. Teil, p. 133. 1912) durch eine sehr elegante objektive Versuchsanordnung erbracht worden.

Lage von ds zur Lichtquelle L allein bestimmt wird und nicht etwa auch von der Gestalt des beugenden Schirmes S oder von dem übrigen Verlaufe des beugenden Randes B abhängt, kann (6) als ein der Youngschen Vorstellungsweise entsprechendes Elementargesetz der Beugung angesprochen werden.

Der Bau der elementaren Beugungswelle du_B ist nun sehr einfach zu überblicken. Der Faktor

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cdot \sin(\varrho_s, ds) ds$$

bestimmt sozusagen den Anteil, den die Lichtquelle L dem Randelemente ds zur Zerstreuung überläßt; $\frac{e^{ikr_s}}{r_s}$ bedingt, daß du eine Kugelwelle wird; und dem Richtungsfaktor

$$\frac{\cos(n, r_s)}{1 + \cos(r_s, \varrho_s)}$$

ist der unsymmetrische Bau dieser Kugelwelle zuzuschreiben. du_B ist ferner überall im Raum regulär, mit alleiniger Ausnahme von ds selbst und dessen Schattengrenze, wo

$$\cos(r_s, \varrho_s) = -1$$

und daher der Richtungsfaktor im allgemeinen unendlich wird.

Nun ist die Frage von Interesse, wie sich diese Singularitäten von du_B im Verhalten der Funktion u_B an dem beugenden Schirmrande B und an der Schattengrenze K äußern. Um zunächst zu zeigen, daß u_B in allen Punkten der Kurve B , wo deren Krümmung nicht unendlich wird, auch selbst endlich bleibt, genügt es, das gleiche Verhalten für das über ein kleines geradliniges Stück von B erstreckte Integral $J = \int du_B$ nachzuweisen. (Ein etwaiges Unendlichwerden von u_B in B könnte nämlich nur durch Integralelemente bewirkt werden, die auf B in unmittelbarster Nähe des gegen B hinstrebenden Aufpunktes gelegen sind.) Zu diesem Zwecke formt man am bequemsten dieses Integral so um, wie dies bei der Betrachtung der Beugung an einer Halbebene in § 6 geschieht. Schließlich erkennt man leicht, daß u_B in K einen Sprung erleidet, der die hier vorhandene Unstetigkeit von u_E gerade kompensiert. $u_E + u_B$ wird ja an der Schattenseite des Schirmes durch das Kirchhoff'sche Integral gegeben, das stets eine im ganzen Raum mit alleiniger Ausnahme der Fläche F reguläre Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ darstellt. Übrigens kann man

dieses unstetige Verhalten von u_B auch aus der in (4) enthaltenen Integraldarstellung dieser Funktion nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Schwingungsgleichung erschließen.¹⁾

§ 3. Analytische Fortsetzungen der Kirchhoffschen Lösung.

Bisher haben wir die Lösung des Kirchhoffschen Beugungsproblems nur an der Schattenseite des Schirmes betrachtet, wo sie mit der durch das Kirchhoffsche Integral definierten Funktion — die von nun an $u_{\text{Kirch.}}$ heißen möge — identisch war. An der beleuchteten Seite von S stellt nun aber $u_{\text{Kirch.}}$ den Beugungsvorgang sicherlich nicht dar. $u_{\text{Kirch.}}$ ist ja²⁾ im ganzen Raum mit alleiniger Ausnahme von F regulär, besitzt also keine der Lichtquelle L entsprechende Singularität. Es lässt sich auch das nicht reguläre Verhalten von $u_{\text{Kirch.}}$ in F ²⁾ physikalisch in keiner Weise rechtfertigen. Den „physikalischen Zweig“ der Funktion u , $u_{\text{phys.}}$, der den gesamten physikalischen Vorgang beschreiben soll, erhalten wir aber, wenn wir das an der Schattengrenze des Schirmes S gegebene

$$u_{\text{phys.}} = u_{\text{Kirch.}} = u_E + u_B$$

auf die Lichtseite von S durch die Fläche F hindurch gemäß der Schwingungsgleichung regulär fortsetzen. Das Resultat

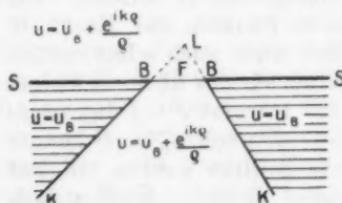


Fig. 2.

dieses Vorgehens ist an der Hand der Formel (5) sofort zu übersehen: u_B wird im ganzen Raum durch das Integral in (5) bestimmt, und u_E ist überall im schraffierten Gebiete der zweidimensional schematisierten Fig. 2 gleich Null, im nichtschraffierten gleich $\frac{e^{ikr}}{r}$.

Wir sind jetzt aber auch in der Lage, die Gesamtheit aller Zweige der Funktion u anzugeben. Setzen wir nämlich $u_{\text{phys.}} = u_E + u_B$ etwa von der beleuchteten Seite von S her

1) Vgl. etwa F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ usw. Leipzig 1891. p. 235.

2) F. Pockels, l. c. p. 229 u. f.

durch S hindurch weiter fort, so erhalten wir einen neuen Zweig von u , der, wie dies wieder die Darstellung (5) ergibt, durch

$$u_{\text{phys.}} + \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$$

gegeben ist. Das heißt, wird der beugende Rand B einmal in einem solchen Sinne umkreist, daß zuerst die beleuchtete und dann die beschattete Seite von S passiert wird, so wächst dabei $u_{\text{phys.}}$ um $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$. Wenn wir also B fortgesetzt umkreisen, bekommen wir für die gesamte Funktion u offenbar die Darstellung :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u_{\text{phys.}} + n \cdot \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} = u_B + u_E + n \cdot \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}, \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{array} \right.$$

Jetzt erkennt man auch, daß der Bereich, in dem u eindeutig ist, aus einem aus lauter gleichen Blättern sich zusammensetzenden Riemannschen Raum R_∞ besteht, der den beugenden Rand B zur einzigen Verzweigungslinie¹⁾ (das Analogon zum Verzweigungspunkte in der Funktionentheorie) besitzt. Wird der Zweig $u_{\text{phys.}}$ für sich allein betrachtet, so entspricht dem Schirme S eine Verzweigungsfläche¹⁾ (in Analogie zum Verzweigungsschnitte in der Funktionentheorie), in der $u_{\text{phys.}}$ nach (7) einen Sprung um $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ erleidet.

Wir wollen jetzt darauf hinweisen, daß die Funktion u auch noch einen anderen Zweig $u^*_{\text{phys.}}$ enthält, der ebenfalls als Lösung eines Kirchhoffschen Beugungsproblems angesehen werden kann. Zunächst bemerken wir, daß $u_{\text{Kirch.}}$ erhalten wird, wenn wir (5) von der beschatteten Seite von S her über S hinaus fortsetzen. $u_{\text{Kirch.}}$ und (5) stimmen ja an der Schattenseite von S miteinander überein und es müssen deshalb die aus ihnen bei der gleichen regulären Fortsetzung entstehenden Zweige miteinander identisch sein. $u_{\text{Kirch.}}$ ist mithin in dem von F und K eingeschlossenen Raum durch

$$u_B + \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$$

1) Über die analysis situs dreidimensionaler Riemannscher Räume vgl. etwa A. Sommerfeld, Proc. of the London Math. Soc. Vol. XXVIII, p. 395. 1897.

und außerhalb davon durch u_B allein gegeben. (vgl. Fig. 3b). F spielt hier die Rolle einer Verzweigungsfläche. Wird nun aus $u_{\text{Kirch.}}$ durch unbeschränktes Umkreisen des Randes B die gesamte Funktion u hergestellt, so erhalten wir sie jetzt offenbar in der Form:

$$(8) \quad u = u_{\text{Kirch.}} + n \cdot \frac{e^{ik\varphi}}{q}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Der hier durch $n = -1$ festgelegte Zweig $u_{\text{Kirch.}} - \frac{e^{ik\varphi}}{q}$ ist nun mit der oben angekündigten Funktion $u_{\text{phys.}}^*$ identisch und beschreibt ersichtlich die Beugung der von L ausgehenden

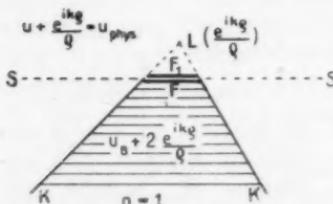


Fig. 3a.

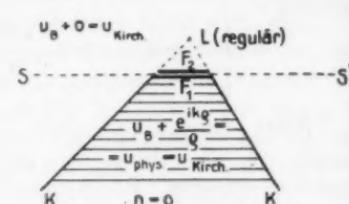


Fig. 3b.

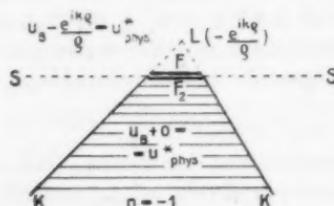


Fig. 3c.

Lichtwelle $-\frac{e^{ik\varphi}}{q}$ an einem schwarzen, mit der Fläche F zusammenfallenden Schirme. Innerhalb des von F und K eingeschlossenen Raumes (vgl. Fig. 3c) wird ja $u_{\text{phys.}}^*$ durch u_B (Beugungswelle) gegeben und außerhalb dieses Raumes durch $u_B - \frac{e^{ik\varphi}}{q}$ (Beugungswelle + einfallendes Licht).

Wie die drei Zweige $u_{\text{phys.}}$, $u_{\text{Kirch.}}$ und $u_{\text{phys.}}^*$ in dem Riemannschen Raum R_∞ gegeneinander gelagert sind, übersieht man am einfachsten an der Hand der obenstehenden Figuren. Die Figg. 8 a, b, c versinnlichen zweidimensional schematisiert die drei den Werten $n = 1, 0, -1$ entsprechenden Zweige

der Funktion (8). Man muß sich die drei Blätter übereinander gelegt und dann die beiden „Ufer“ F_1 und ebenso F_2 miteinander verschmolzen denken. In jedem Blatte ist in dem „schraffierten“ und „unschraffierten“ Bereiche die hier gemäß (7) geltende Darstellung für u angegeben und bei der Lichtquelle L die in diesem Punkte auftretende Singularität in Klammern vermerkt. Es ist sofort klar, daß $u_{\text{phys.}}$ in der oberen Halbebene des Blattes $n = 1$ und der unteren des Blattes $n = 0$ enthalten ist und daß die Blätter $n = 0$ bzw. $n = -1$ den Funktionen $u_{\text{Kirch.}}$ bzw. $u^*_{\text{phys.}}$ entsprechen.

Wir bemerken noch anhangsweise, daß die durch (7) und (8) gegebene doppelte Darstellbarkeit der Funktion u der zweifachen Möglichkeit entspricht, durch eine durch B hindurchgelegte (entweder wie F ganz im Endlichen gelegene oder, wie S , auch ins Unendliche verlaufende) Verzweigungsfläche aus dem Riemannschen Raum R_∞ ein schlichtes Blatt abzusondern.

§ 4. Verhalten der Kirchhoffschen Lösung am schwarzen Schirme. Beugung am vollkommen blanken Schirme.

Physikalisch bemerkenswert ist die Tatsache, daß in $u_{\text{phys.}}$ an der beleuchteten Seite des Schirmes S kein Term auftritt, der als reflektiertes Licht zu deuten wäre. Der Kirchhoffsche Schirm ist also tatsächlich schwarz.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen haben aber auch die analytischen Eigenschaften festgestellt, die einem schwarzen Schirme bei der Kirchhoffschen Behandlungsweise der Beugungerscheinungen zuerteilt werden: $u_{\text{phys.}}$ erleidet in dem Schirme S einen Sprung um $\frac{e^{ikq}}{q}$ oder, allgemein gesprochen, um die Licherregung, die auch bei Abwesenheit des Schirmes vorhanden wäre.

Es bedarf aber wohl kaum eines besonderen Hinweises, daß diesem analytischen Verhalten, das hier den Kirchhoffschen schwarzen Schirm charakterisiert, physikalisch keine irgendwie ausgezeichnete Bedeutung zukommt. Wie dies besonders Voigt¹⁾ und Sommerfeld²⁾ hervorgehoben haben, ist allen schwarzen Schirmen nur das eine Merkmal gemeinsam, daß

1) W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik. Bd. II. Leipzig 1895. p. 768.

2) S. II. p. 13.

der Energiestrom an der Oberfläche des schwarzen Schirmes stets nach innen gerichtet ist. In der Mannigfaltigkeit der durch diese Forderung festgelegten schwarzen Schirme ist der Kirchhoffsche nur dadurch ausgezeichnet, daß die Lösung des ihm entsprechenden Beugungsproblems unmittelbar durch das Kirchhoffsche Integral (2) anzugeben ist.

In Kürze wollen wir noch auf die Frage eingehen, inwieweit das Kirchhoffsche Verfahren die Beugung an einem vollkommen blanken Schirme approximieren kann. Wir setzen im folgenden S und F als eben voraus und benutzen, wie dies Sommerfeld in seiner Vorlesung tut, in dem Kirchhoff-schen Integral (2) statt $\frac{e^{ikr}}{r}$ die Greensche Funktion für den Halbraum, nämlich

$$(9) \quad \frac{e^{ikr}}{r} \pm \frac{e^{ikr'}}{r'}.$$

r' bedeutet dabei den dem r , d. h. $\overrightarrow{Pd\ell}$ analogen Abstand des an S gespiegelten Aufpunktes P (er heiße P'), d. h. $\overrightarrow{P'd\ell}$. Die Verwendung der Greenschen Funktion sichert uns dabei schon von vornherein den Vorteil, daß wir das Verhalten von u bei einer von der Schattenseite her an F und S erfolgenden Annäherung vollständig überblicken können. Es wird für den Fall, daß wir in (9) das obere (untere) Zeichen nehmen $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. (u) in F gleich $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$, während es, was besonders wichtig ist, in S verschwindet.

Auf demselben Wege, der zur Herleitung von (5) diente, erhält man jetzt, und zwar wieder zunächst nur an der beschatteten Seite von S , zur Beschreibung des Beugungsvorganges die Funktion

$$(10) \quad u_E + u_B \pm u_{B'},$$

wobei u_E und u_B hier ihre frühere Bedeutung haben und $u_{B'}$ dem Werte der Funktion u_B in dem Punkte P' entspricht. Wird also (10) auf die beleuchtete Seite von S über F hinaus regulär fortgesetzt (vgl. die zweidimensional schematisierte Fig. 4), so erleidet $u_{B'}$ in der durch Spiegelung an S aus der Schattengrenze K hervorgehenden Fläche K' einen Sprung, der offenbar behoben werden kann, falls man zu (10) eine

Funktion $\mp u_R$ („reflektiertes u “) hinzufügt, die in dem von K' und S eingeschlossenen (in der Fig. schraffierten) Raume gleich $\mp \frac{e^{ik\varrho'}}{\varrho'}$, sonst aber überall gleich Null ist. ϱ' ist dabei die Entfernung des Aufpunktes P von der an S gespiegelten Lichtquelle L etwa L' . Auf diese Weise erhält man die bis auf L und S nunmehr in dem ganzen physikalischen Raume reguläre Lösung der Schwingungsgleichung

$$(11) \quad u = u_E + u_B \pm (-u_R + u_{B'})$$

die an der beleuchteten Seite von S eine reflektierte Welle u_R enthält.

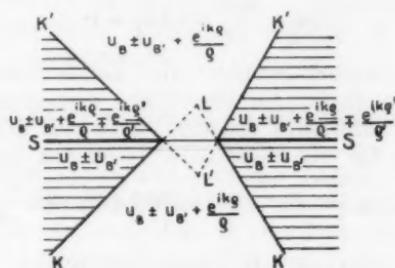


Fig. 4.

Wie bereits früher hervorgehoben wurde und wie man jetzt aus (11) auch direkt ersieht (vgl. Fig. 4), erfüllt u an der Schattenseite von S , je nach dem Vorzeichen in (9), die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{oder} \quad u = 0.$$

Gleichzeitig erkennt man aber, daß an der beleuchteten Seite von S keine dieser beiden Randbedingungen befriedigt wird. Denn wird z. B. in (9) das obere Vorzeichen vorausgesetzt, so erfüllen zwar hier die beiden Beugungswellen $u_B + u_{B'}$ die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

die einfallende und die reflektierte Welle $u_E - u_R$ genügen aber zusammengenommen jetzt der Randbedingung $u = 0$. Wir können somit sagen: In dem jetzt betrachteten Falle ist

der Schirm S zwar an beiden Seiten reflektierend, aber doch nur an der beschatteten Seite im Sinne der Randbedingungen

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

vollkommen blank.

§ 5. Ausstrahlungsbedingung. Eindeutigkeit.

Man kann sich auch noch leicht überzeugen, daß die Funktion u in ihren durch ein endliches n bestimmten Zweigen und daher auch speziell der uns interessierende Zweig $u_{\text{phys.}}$ im Unendlichen verschwinden und der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung¹⁾

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right) = 0$$

genügen. Physikalisch bedeutet dies nichts anderes, als daß u und $u_{\text{phys.}}$ aus lauter ins Unendliche divergierenden Wellen bestehen. Das Erfülltsein von (12) ergibt sich einfach aus der Darstellung (8) für die Funktion u ; denn das Bestehen dieser Relation für $u_{\text{Kirch.}}$ [in der Darstellung (2)] und $\frac{e^{ikr}}{r}$ ist ja unmittelbar klar.

Die oben angegebenen Eigenschaften der Lösung $u_{\text{phys.}}$ des Kirchhoffschen Beugungsproblems hier nochmals zusammenfassend, können wir also behaupten:

Die Funktion $u_{\text{phys.}}$ wird durch eine, mit Ausnahme der Lichtquelle L und des Schirmes S im Endlichen überall stetige und einmal stetig differentierbare Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ gegeben, die sich in L wie $\frac{e^{ikr}}{r}$ verhält, in S endlich bleibt, aber den Sprung $\frac{e^{ikr}}{r}$ erleidet und im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung genügt.

Durch diese Eigenschaften ist die Funktion $u_{\text{phys.}}$ eindeutig bestimmt. Die Differenz U zweier den obigen Bedingungen entsprechenden Funktionen $u_{\text{phys.}}$ ist ja im schlichten Raum überall eindeutig und stetig und genügt im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung. U ist ferner, mit eventueller Ausnahme der beugenden Kanten B , überall einmal

1) A. Sommerfeld, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 21. p. 309. 1912. Vgl. insbesondere p. 331.

stetig differentierbar. Es läßt sich mithin U nach (1) durch das Integral

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} df$$

darstellen, wobei die Integration über eine den beugenden Rand B umschließende Röhre zu erstrecken ist. Nach (1) müßte eigentlich hier noch ein über eine unendlich ferne Fläche erstrecktes Flächenintegral dazu kommen, das aber wegen der Ausstrahlungsbedingung verschwindet. Lassen wir nun den Radius der den beugenden Rand B umschließenden Röhre abnehmen, so verschwindet U , wie man dies etwa nach einem von Sommerfeld¹⁾ bei räumlichen Potentialen angewandten Verfahren zeigen kann. Damit ist aber die Eindeutigkeit der Lösung $u_{\text{phys.}}$ schon erwiesen,

§ 6. Die Kirchhoffsche Lösung des Beugungsproblems für eine unendliche Halbebene.

Es soll nun die Kirchhoffsche Lösung des Beugungsproblems für eine unendliche Halbebene mit Hilfe des in § 2 angegebenen Elementargesetzes in eine Form gebracht werden, die in ihrem Aufbau mit den Sommerfeldschen Lösungen für den schwarzen Schirm sehr nahe verwandt ist und sich daher für den Vergleich der beiden Theorien besonders gut eignet.

Das Ziel der folgenden Überlegungen sind dann vor allem zwei Resultate: Das erste ist die Erkenntnis, daß die „Familienähnlichkeit“ der Kirchhoffschen und Sommerfeldschen Funktionen in einfachster Weise die Tatsache erklärt, daß die beiden Beugungstheorien für nicht zu große Beugungswinkel (wo allein eine exakte Beobachtung möglich ist) praktisch die gleiche Intensitätsverteilung liefern. Als zweites Ergebnis wird uns die Annahme plausibel werden, daß die Sommerfeldsche Beugungswelle durch Interferenz von den Kugelwellen (6) ganz ähnlich gebauten, elementaren Beugungswellen entsteht.

In diesem Abschnitt soll nun eine neue Form der Kirchhoffsschen Lösung für eine Halbebene hergeleitet werden. r, φ, z sei

1) A. Sommerfeld, Proc. of the London Math. Soc. Vol. XXVIII. p. 395. 1897.

ein System von Zylinderkoordinaten. Die beugende Halbebene S möge durch die Gleichung $\varphi = 0$ gegeben sein, so daß die beugende Kante mit der z -Achse des Koordinatensystems zusammenfällt. Die Lichtquelle L und der Aufpunkt P sollen durch die Koordinaten r_0, φ_0, z_0 , bzw. r, φ, z festgelegt sein und die z -Koordinate für die Punkte der beugenden Kante mit s bezeichnet werden (vgl. Fig. 5).

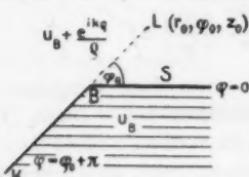


Fig. 5.

Es ist dann:

$$\varrho_s^2 = (s - z_0)^2 + r_0^2,$$

$$r_s^2 = (s - z)^2 + r^2,$$

$$\sin(\varrho_s, ds) = \frac{r_0}{\varrho_s}.$$

Da ferner die Projektionen von r_s und r auf die Normale der durch die beugende Kante und L hindurchgehenden Ebene $\varphi = \varphi_0 + \pi$ (Schattengrenze K) einander gleich sind, nämlich gleich dem Abstande des Punktes P von dieser Ebene, so ist:

$$\cos(r_s, n) = \frac{r \sin(\varphi - \varphi_0 - \pi)}{r_s}.$$

Schließlich erhält man (mit Benutzung des cos-Satzes):

$$\begin{aligned} \overline{LP^2} &= r_0^2 + r^2 + (z - z_0)^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \\ &= r_s^2 + \varrho_s^2 - 2 r_s \varrho_s \cos(r_s, \varrho_s), \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} \cos(r_s, \varrho_s) &= \frac{s^2 - s(z_0 + z) + z z_0 + r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_s \varrho_s} \\ &= \frac{(s - z)(s - z_0) + r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_s \varrho_s}. \end{aligned}$$

Führen wir nun durch die Gleichung

$$(r_s + \varrho_s)^2 = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 + 2 r r_0 \cos \alpha$$

an Stelle von s eine neue Integrationsvariable α ein und beachten dabei, daß dann

$$\sin i \alpha = i \frac{(s - z) \varrho_s + (s - z_0) r_s}{r r_0}$$

wird, so läßt sich (5) für den Fall der Beugung an einer Halbebene umformen in

$$(18) \quad u = u_E - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sin(\varphi - \varphi_0 - \pi)}{\cos(\varphi - \varphi_0 - \pi) - \cos i a} da,$$

worin $R = r_s + \varrho_s = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 + 2r r_0 \cos i a}$.

§ 7. Das Sommerfeldsche Beugungsproblem.

Wir wollen nun an die für unsere Schlüsse wichtigen Resultate der Sommerfeldschen Beugungstheorie¹⁾ erinnern. Das allgemeinste, der Behandlung durch die Sommerfeldschen Methoden zugängliche Beugungsproblem ist die Beugung des von einer punktförmigen Lichtquelle L (mit den Koordinaten r_0, φ_0, z_0) ausgestrahlten Lichtes an einem vollkommen blanken (von den beiden Halbebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = \chi$ begrenzten) Keile. Die Sommerfeldsche Lösung wird nach einem Spiegelungsverfahren hergestellt und ist je nach dem Polarisationszustande des ausgestrahlten Lichtes durch

$$W = w(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0, z_0; \chi) \pm w(r, \varphi, z; r_0 - \varphi_0, z_0; \chi)$$

bestimmt. Im folgenden wird uns aber nur die Funktion $w = w(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0, z_0; \chi)$ interessieren, die nach Voigt und Sommerfeld bei beliebigem, nur der Einschränkung $\chi > \pi$ unterworfenen Winkel χ die Beugung an einem durch einen geradlinigen Rand begrenzten schwarzen Schirme beschreibt. Im nächsten Paragraphen soll dann w zum Vergleiche mit der Funktion $u_{\text{phys.}}$ herangezogen werden.

Die Funktion w wird nun durch die folgenden Eigenchaften festgelegt:

R_∞ sei ein unendlichvielblättriger Riemannscher Raum, dessen einzige Verzweigungsline mit der z -Achse unseres Zylinderkoordinatensystems zusammenfällt, in dem also zwei Punkte, deren Koordinaten sich nur in den φ -Werten um $2\pi\nu$ ($\nu = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) unterscheiden, als voneinander verschiedene anzusehen sind.

Die Funktion w ist dann in R_∞ eindeutig und in ihrer Abhängigkeit von φ periodisch mit der Periode 2χ . Sie ist in R_∞ überall endlich, bis auf die symmetrisch um die Win-

1) Vgl. S. I und S. II. Eine kurze allgemeine Übersicht über die Sommerfeldsche Theorie der Beugung ist auch in dem Artikel von P. S. Epstein in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V₂, p. 488 enthalten.

dungsgerade angeordneten Punkte $(r_0, \varphi_0 + 2\nu\chi, z_0)$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), wo die synchron schwingenden Lichtquellen L_ν :

$$\frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} \quad (R_\nu = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0 - 2\nu\chi)})$$

gelegen sind. In der Windungsgeraden ist zwar die Funktion w selbst und ihre Ableitungen nach φ und z , nicht aber ihre Ableitung nach r endlich. Im Unendlichen genügt w der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung.

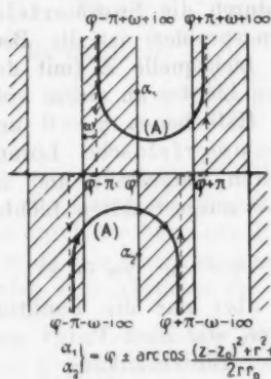


Fig. 6.

Nach dem Sommerfeldschen heuristischen Verfahren¹⁾ kann nun w unmittelbar in der Form

$$w = \frac{1}{2\chi} \int_{(A)} \frac{e^{ikR^*}}{R^*} \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{\chi}(\varphi_0 - \alpha)}} d\alpha,$$

$$R^* = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \varphi)}$$

angesetzt werden. Die Integration ist in der komplexen α -Ebene auf dem in der Fig. 6 ersichtlichen Wege (A) zu führen. Wird nun (A) in die beiden Geraden

$$\Re(\alpha) = \varphi \pm \pi$$

deformiert²⁾, so wird mit Rücksicht darauf, daß in der reellen Achse der α -Ebene in den Punkten $\varphi_0 + 2\nu\chi$ einfache Pole gelegen sind, w in die Gestalt

$$w = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}_\nu(\varphi) \frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} + \frac{1}{2i\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikR}}{R} \left[\frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 - \pi + i\alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 + \pi + i\alpha)}} \right] d\alpha,$$

$$R_\nu = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0 - 2\nu\chi)},$$

$$R = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos i\alpha}$$

1) S. II, p. 22.

2) S. II, p. 27.

übergeführt. $\vartheta_\nu(\varphi)$ ist ein Diskontinuitätsfaktor, der nur für φ -Werte, die der Ungleichung

$$\varphi_0 - \pi + 2\nu\chi \leq \varphi \leq \varphi_0 + \pi + 2\nu\chi$$

entsprechen, gleich Eins, sonst aber überall gleich Null ist.

Wenn wir noch beachten, daß

$$\frac{1}{1 - e^{i(\alpha + \beta)}} + \frac{1}{1 - e^{i(\alpha - \beta)}} = \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} - e^{-i\beta} - e^{i\beta}} + \\ + 1 = -i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta} + 1$$

ist, so wird schließlich

$$w = w_E + w_{B_1} + w_{B_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_\nu(\varphi) \frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} - \\ - \frac{1}{2\chi} \int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sin \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 - \pi)}{\cos \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 - \pi) - \cos \frac{\pi}{\chi}ia} da + \\ + \frac{1}{2\chi} \int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sin \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 + \pi)}{\cos \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 + \pi) - \cos \frac{\pi}{\chi}ia} da.$$

Wir wollen noch kurz die Deutung der Bestandteile w_E , w_{B_1} und w_{B_2} angeben, in die die Funktion w nach ihrer letzten Darstellung zerfällt. w_E („einfallende Welle“) stellt die von den Lichtquellen L_ν ausgehenden Lichtwellen im Riemannschen Raum R_∞ so dar, wie man dies nach der geometrischen Optik erwartet, falls man der Verzweigungsgeraden eine schattenggebende Wirkung zuschreibt. Die von einem ins Auge gefaßten Lichtpunkt $L_{\nu*}$ ($\varphi_0, \varphi_0 + 2\nu\chi, z_0$) ausgestrahlte Welle

$$\frac{e^{ikR_{\nu*}}}{R_{\nu*}}$$

wird nämlich an der Windungsgeraden sozusagen aufgeschlitzt und erleidet (wegen des Diskontinuitätsfaktors $\vartheta_{\nu*}(\varphi)$) an den „Schattengrenzen“

$\varphi = \varphi_0 - \pi + 2\nu\chi$ und $\varphi = \varphi_0 + \pi + 2\nu\chi$
einen Sprung von

$$\frac{e^{ikR_{\nu*}}}{R_{\nu*}}$$

auf Null. Die Unstetigkeiten der ganzen Funktion w_E liegen demnach in den beiden Ebenenfächern („Schattengrenzen“)

$$(14) \quad \begin{cases} \text{a)} \varphi = \varphi_0 - \pi + 2\nu\chi & (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \text{b)} \varphi = \varphi_0 + \pi + 2\nu\chi \end{cases}$$

Von den beiden Integralen („Beugungswellen“) w_{B_1} und w_{B_2} ist w_{B_1} im ganzen Raum R_∞ bis auf die Schattengrenzen (14b) stetig und erleidet hier einen Sprung, der die an diesen Stellen liegenden Unstetigkeiten von w_E gerade kompensiert. Analog ist w_{B_2} den Schattengrenzen (14a) zugeordnet.

§ 8. Vergleich der beiden Beugungstheorien. Die elementare Beugungswelle für die Sommerfeldsche Lösung.

Die Analogie zwischen u (13) und der Funktion w für den Fall der Beugung an einer schwarzen Halbebene ist nun sofort einzusehen. Der erste in (13) auftretende Term u_E entspricht der unendlichen Summe w_E , und der zweite Term u_B wird mit w_{B_1} identisch, falls wir hier $\chi = \pi$ setzen. Es fehlt dagegen in u ein zu w_{B_2} analoges Integral.

Wir wollen nun zusehen, wie sich schon auf Grund der jetzt auseinandergesetzten Verwandtschaft von u und w die Tatsache ergibt, daß die beiden Funktionen für nicht zu große Abstände von der Schattengrenze die gleichen Beugungsercheinungen darstellen. Die Theorie der Funktion w zeigt zunächst:

I. daß die Wellen w_{B_1} bzw. w_{B_2} nur in kleinen Winkelabständen von den ihnen zugehörigen Schattengrenzen (14b) bzw. (14a) eine mit der einfallenden Welle vergleichbare Amplitude haben und daß jede dieser beiden Funktionen in einem größeren Winkelabstande von der ihr entsprechenden Schattengrenze bei einer Auswertung von w vollständig zu vernachlässigen ist;

II. daß w_{B_1} und w_{B_2} in der Nähe ihrer Schattengrenzen von dem Werte des Winkels χ praktisch nicht abhängen.

Aus I. und II. folgt nun sofort, daß die Funktionen w stets die gleichen Beugungerscheinungen beschreiben, wenn nur die beiden Schattengrenzen (14a) und (14b) nicht allzunahe aneinander liegen und daß dies auch noch in einem solchen singulären Falle gilt, falls wir nur das der einen dieser beiden Schattengrenzen zugeordnete w_{B_ν} ($\nu = 1, 2$) und den entsprechenden Term in w_E streichen. Nun ist es aber klar, daß nichts anderes ist als eine auf die oben angedeutete Weise für

den singulären Fall $\chi = \pi$ konstruierte Funktion w und mithin dieselben Beugungerscheinungen darstellen muß wie w in einem nichtsingulären Falle. Es mag noch daran erinnert werden, wie sich w beim Zusammenfallen der beiden Schatten-grenzen verhält. In einem jeden solchen singulären Falle gibt es offenbar ein ganzzahliges μ , so daß [vgl. (14a) und (14b)]

$$(\varphi_0 - \pi + 2(\nu + \mu)\chi) - (\varphi_0 + \pi + 2\nu\chi) = 2(\mu\chi - \pi) = 0 \\ (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

oder

$$\chi = \frac{\pi}{\mu}$$

wird. Die beiden Integrale w_{B_1} und w_{B_2} werden dann bis auf das Vorzeichen einander gleich und tilgen sich in w gegenseitig. Dies besagt aber, daß in einem durch

$$\chi = \frac{\pi}{\mu}$$

bestimmten Winkelspiegel keine Beugungerscheinungen zu beobachten sind.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß wir die Funktion u auch ohne jede Rechnung hätten herstellen können. In § 5 haben wir ja die Eigenschaften angegeben, die u vollständig eindeutig bestimmen, und durch Betrachtung der Struktur der Funktion w hätten wir dann aus ihren Bestandteilen unmittelbar eine diesem Eindeutigkeitssatze entsprechende Funktion u angeben können.

Zum Schlusse wollen wir noch die Frage nach dem Elementargesetze der Sommerfeldschen Beugungswellen w_{B_1} und w_{B_2} streifen. Indem wir in w_{B_1} und w_{B_2} durch die in § 6 benutzte Substitution in entsprechender Weise statt a die Integrationsvariable s einführen, erhalten wir ein Elementargesetz, das für den Sonderfall $\chi = \pi$ mit dem von uns als Youngsches bezeichneten übereinstimmt. Offenbar kommt aber diesem übrigens ziemlich kompliziert gebauten Elementargesetze, außer für den gerade betrachteten Keil, keine weitere Bedeutung zu. Selbst für $\chi = 2\pi$, d. h. im Falle der Halbebene läßt sich dieses Elementargesetz zur synthetischen Lösung neuer Beugungsprobleme nicht unmittelbar verwenden. Die Ursache dafür besteht darin, daß bei exakter Behandlung im Sommerfeldschen Sinne nicht mehr der Sprung von u bzw. $\partial u / \partial n$ am Schirme in Betracht gezogen wird, sondern die Lösung u selbst (bzw. $\partial u / \partial n$) hier ganz bestimmte Bedingungen

$$\left(u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \right)$$

zu erfüllen hat. Die dadurch verursachte Schwierigkeit kann man sich am einfachsten im zweidimensionalen Falle klar machen, wo sie im wesentlichen bereits vorhanden ist, wenn man etwa aus den einfallenden, reflektierten und den (der Lösung für die Halbebene entsprechenden) Sommerfeldschen Beugungswellen das Beugungsproblem für einen Spalt oder



Fig. 7a.

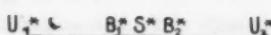


Fig. 7b.

einen beugenden Streifen lösen will. Im Falle des Spaltes (Fig. 7a) wird dann durch die von der beugenden Kante B_1 (B_2) ausgehende Beugungswelle die Randbedingung an dem Schirme S_2 (S_1) nicht erfüllt, während im Falle des Streifens (Fig. 7b) die von der beugenden Kante B_1^* (B_2^*) ausgehende Welle zwar die Randbedingung an dem Schirme S^* befriedigt, in der Geraden $B_2^* U_2^*$ ($B_1^* U_1^*$) hingegen sich unzulässigerweise unstetig verhält.

München, Inst. f. theoret. Physik, im Juli 1917.

(Eingegangen 28. Juli 1917.)

Nachschrift bei der Korrektur.

Die zu Anfang des § 4 erwähnte Tatsache, daß $u_{\text{phys.}}$ in dem Schirme S einen Sprung um den Wert der Lichterregung erleidet, die hier bei Abwesenheit des Schirmes S vorhanden wäre, lässt sich folgendermaßen einfach erschließen: Die die Lichterregung darstellende Funktion ist nach (1) gleich dem über die ganze Fläche $\mp + S$ erstreckten Kirchhoff'schen Integral; $u_{\text{phys.}}$ ist mithin gleich der, die Lichterregung darstellenden Funktion vermindert um das über S erstreckte Kirchhoff'sche Integral; und dies ist eine Darstellung von $u_{\text{phys.}}$, die im ganzen Definitionsbereiche dieses Zweiges der Funktion u gilt. Da nun das über die Fläche S erstreckte Integral in S den erwähnten Sprung erleidet — eine Folgerung der zu Anfang des § 1 angeführten Sätze — während die die Lichterregung darstellende Funktion in S regulär bleibt, ist die obige Behauptung auf diese Weise wohl einfach erwiesen.

**2. Untersuchungen über die Absorption harter
Röntgenstrahlen in Gasen;
von Minna Lang.**

(Hierzu Tafel III.)

(Frankfurter Dissertation.)

Erster Teil.

Vorgeschichte der Arbeit.

§ 1. Einleitendes.

In seiner ersten Mitteilung hat Röntgen¹⁾ die Vermutung ausgesprochen, daß die Durchlässigkeit einer Substanz für X-Strahlen in erster Linie von ihrer Dichte abhängt. Später glaubte man, daß von Lenard für Kathodenstrahlen aufgestellte Gesetz der Massenproportionalität im Absorptionsmechanismus auch für X-Strahlen erfüllt zu sehen ist. Die Literatur der vergangenen Jahre ist überreich an Absorptionsmessungen von Röntgenstrahlen. Die Ergebnisse sind vielfach widersprechend, besonders für gasförmige Medien, was wohl auf unzureichende Versuchsmethoden zurückzuführen ist. — Die vorliegende Arbeit hat es sich zur Aufgabe gemacht, die vielen Ergebnisse wertvoller Untersuchungen der letzten 20 Jahre vom modernen Standpunkte des Absorptionsmechanismus zu diskutieren und mit eigenen Resultaten auf Grund neuerer Meßtechnik zu vergleichen. Seitdem man weiß, daß X-Strahlen und γ -Strahlen wesensgleich sind und sich nur durch verschiedene Impulsbreiten unterscheiden, war es von Interesse, die Absorptionsmessungen für eine harte X-Strahlung zu wiederholen und in Parallelle zu setzen zu den entsprechenden Messungen für γ -Strahlen. Für feste Substanzen ist diese Aufgabe von Winawer²⁾ erledigt worden, im folgenden werden die analogen Untersuchungen auf einige gasförmige Medien übertragen.

1) W. Röntgen, I. Mitteilung: Würzburger Sitzungsber. 1895.
p. 137—141.

2) B. Winawer, Phys. Zeitschr. 15. p. 942. 1914.

§ 2. Bestimmung des Absorptionsvermögens durch den Absorptionskoeffizienten.

Für eine korpuskulare sowohl als eine elektromagnetische Strahlung bestimmt man die Größe der Absorption, welche die Strahlung auf dem Wege durch den Körper erfährt, eindeutig durch den Absorptionskoeffizienten, vorausgesetzt, daß die Strahlung in sich homogen ist. Sei J die auffallende Intensität der Strahlung, sei $-dJ$ die Intensitätsabnahme, welche die Strahlung auf dem Absorptionswege dx im Körper erfährt, dann ist diese Intensitätsabnahme sowohl der durchsetzten Substanzlänge dx als auch der auffallenden Intensität J proportional, in Zeichen

$$-dJ = \mu J dx,$$

$$-\frac{dJ}{J} = \mu dx.$$

μ ist der *Absorptionskoeffizient*.

Angenommen, die Strahlen durchsetzen die Substanz auf dem Wege von der Länge l , die auffallenden und austretenden Intensitäten seien bestimmt zu J und J' , dann beträgt die gesamte Intensitätsabnahme auf dem Wege l

$$-\int_J^{J'} \frac{dJ}{J} = \mu \int_0^l dx,$$

$$\log \text{nat } J - \log \text{nat } J' = \mu l,$$

$$\frac{J'}{J} = e^{-\mu \cdot l}.$$

$e^{-\mu l}$ bestimmt somit das Verhältnis der Intensitäten, wenn die Strahlen durch Substanz und Vakuum gegangen sind. Durch diese Beziehung ist die Methode des Experimentes angezeigt. Die Messungen erfolgen einfach in der Weise, daß in den Gang der Strahlen ein Rohr von bekannter Länge gebracht wird und die Strahlungsintensitäten bei Vakuum und Gasfüllung von bestimmtem Druck beobachtet werden. Aus der mathematischen Ableitung ergibt sich demnach als Definition von μ : der *Absorptionskoeffizient eines Mediums* mißt die Absorption pro Dickeinheit, also pro em Weglänge der Strahlen. Er besitzt demnach die Dimension cm^{-1} .

Vielfach bestimmt man das Absorptionsvermögen eines Körpers durch seinen „*Massenabsorptionskoeffizienten*“. Dabei

versteht man unter Massenabsorptionskoeffizienten den Quotienten aus Absorptionskoeffizient und Dichte der Substanz. Dieser Massenabsorptionskoeffizient μ/ρ mißt also die Absorption eines Körpers pro Masseneinheit und hat demnach die Dimension $\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$.

§ 3. Historischer Abriß der Absorptionsmessungen von Röntgenstrahlen an gasförmigen Medien.

Unter allen Körpern sind die gasförmigen zuletzt auf ihr Absorptionsvermögen gegenüber X-Strahlen untersucht worden, wohl deswegen, weil bei den geringfügigen Absorptionseffekten die Meßeinrichtungen besonders empfindlich sein müssen. Im folgenden werden die bisherigen Arbeiten in größerem Umfange zu kurzer Besprechung herangezogen, um eine weitgehende Diskussion älterer und neuerer Ergebnisse zu ermöglichen. Auch haben die eigenen Beobachtungsmethoden sich historisch aus den älteren Untersuchungen entwickelt, so daß ihrer mit Dankbarkeit gedacht werden muß. Schließlich ermöglicht ein derartiger Überblick eine zusammenfassende Darstellung der Fehlerquellen, welche bei Absorptionsmessungen von Röntgenstrahlen zu beachten sind.

Die erste Absorptionsmessung an Gasen stammt von Rutherford¹⁾ aus dem Jahre 1897.

Seine Versuchsanordnung hat den Fehler, daß die unsymmetrische Strahlungsverteilung des Röntgenrohres nach den verschiedenen Emissionsrichtungen unberücksichtigt bleibt. Wenn der Verfasser für Schwefelwasserstoff ein höheres Absorptionsvermögen findet als für Schwefeldioxyd, so ist mit einem Beobachtungsfehler zu rechnen.

Von großer Bedeutung für die Theorie der Röntgenstrahlenabsorption waren eine Reihe wertvoller Arbeiten von Benoist aus den Jahren 1896—1901.²⁾ Er machte die für die Theorie fundamentale Entdeckung, daß die Größe der Absorption, die von einer gegebenen Menge Substanz hervorgerufen wird, vollständig unabhängig ist von dem physikalischen und chemischen Zustand der Substanz. Weiter erwies sich das Absorptionsvermögen als unabhängig vom Aggregatzustand

1) E. Rutherford, Phil. Mag. (5) 48, p. 241. 1897.

2) L. Benoist, Journal de Physique (3) 10, p. 653. 1901.

und von der Temperatur. Dies galt für kristallisierte sowie für amorphe Körper. Die Absorption erwies sich somit als unabhängig von der gegenseitigen Moleküllagerung der Materie. Ebenso besaßen allotrope Modifikationen und polymere Verbindungen unter sich konstante Absorption. Schließlich hat Benoist das *Additivgesetz der Massenabsorption* beobachtet, wonach in einer Stoffverbindung oder Stoffmischung die Absorption sich recht angenähert nach der Gleichung vollzieht

$$\frac{M}{E} = \sum \frac{m}{e}.$$

Dabei bedeuten

- M = Gesamtmasse der Mischung oder Verbindung,
- E = Durchlässigkeit der Gesamtmasse,
- m = Teilmasse eines der Verbindungsstoffe,
- e = Durchlässigkeit eines der Verbindungsstoffe.

Benoist hat weiter erkannt, daß die Durchlässigkeit eines Stoffes in viel höherem Grade von dem Atomgewichte als von der Dichte des Absorbens abhängt. Damit war die Ungültigkeit des Massenproportionalitätsgesetzes erwiesen.

Eine Reihe weiterer Arbeiten befassen sich mit der Beziehung zwischen Absorption und Druck. Benoist¹⁾ stellte im Jahre 1897 fest, daß die Absorption eines Gases zwischen 1 und 2 Atmosphären der Dichte proportional sei. Er glaubte, daß die „spezifische Absorption“ für Gase (darunter versteht er den Quotienten aus Dichte und Absorptionskoeffizient) eine Konstante sei.

Für den Dampf von Methyljodid zeigte Rutherford²⁾, daß bis zu $\frac{1}{4}$ Atmosphärendruck die Absorption proportional mit dem Drucke ging. — In einer eingehenden Arbeit aus dem Jahre 1909 hat Crowther³⁾ gezeigt, daß bis zum Drucke Null ein streng linearer Zusammenhang zwischen Absorption und Druck besteht. — Von Bedeutung sind weiterhin zwei gleichzeitige Arbeiten von Owen⁴⁾ und Barkla und Collier.⁵⁾ Beide Arbeiten behandeln die Absorption homogener X-Strahlen

1) L. Benoist, Compt. rend. **124**, p. 146—148. 1897.

2) E. Rutherford u. Mc. Clung, Phil. Trans. (A), **196**, p. 25. 1901.

3) J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. (A) **82**, p. 103—127. 1909.

4) E. A. Owen, Proc. Roy. Soc. (A) **86**, p. 426. 1912.

5) C. G. Barkla u. V. Collier, Phil. Mag. **23**, p. 987. 1912.

in Gasen. Benutzt wurden als Fluoreszenzstrahlen die härteren K-Serien der Elemente Eisen bis Molybdän bzw. Eisen bis Silber. In Tab. 1 sind die beiderlei Versuchsergebnisse zusammengestellt.

Tabelle 1.

Strahler	Atomgewicht	Luft		SO ₂		Wellenlänge $\lambda \cdot 10^8$	log λ	Luft	SO ₂
		μ	μ/ρ	μ	μ/ρ			log μ/ρ	log μ/ρ
Fe	55,85	·0254 ·0202	19,72	·2673 ·24	91,2	1,946	0,289	1,193	1,921
Co	58,97	·0165	—	·20	—	1,768	0,256	1,104	1,841
Ni	58,68	·0186 ·0136	14,39	·1691 ·166	57,73	1,662	0,221	1,021	1,760
Cu	63,57	·0130 ·0109	10,08	·1404 ·134	47,90	1,549	0,190	0,926	1,668
Zn	65,37	·0108 ·0090	8,41	·1040 ·112	35,49	1,445	0,160	0,843	1,590
As	75,0	·00592 ·0053	4,59	·0548 ·066	18,69	1,170	0,068	0,661	1,271
Se	79,2	·00442 ·0044	3,43	·0449 ·0546	15,31	1,104	0,041	0,535	1,184
Br	79,92	·0039	—	·050	—	1,035	0,012	—	—
Sr	87,62	·00258 ·0023	2,00	·0272 ·0281	9,29	0,871	−0,059	0,301	0,968
Mo	96,0	·00166 ·00127	1,29	·0170 ·0160	5,81	0,709	−0,142	−0,009	0,745
Ag	107,88	·00077	—	·0079	—	0,562	−0,252	−0,229	0,439

Die oberen Werte der Absorptionskoeffizienten μ einer Horizontalen stammen von Owen, die unteren von Barkla und Collier. Die Owenschen Angaben haben den Vorzug, daß sie sämtlich auf Grund besonderer Messungen erhalten wurden, während die Absorptionskoeffizienten von Barkla und Collier zum größten Teile Interpolationswerte darstellen, indem die Autoren nur für die Cu- und Zn-Strahlung die Werte μ für Luft experimentell ermittelt haben. Vergleicht man nun die entsprechenden Werte der beiden Arbeiten, so zeigt sich, daß die experimentell bestimmten Absorptionskoeffizienten für Luft der Cu- und Zn-Strahlung um recht genau 20 Proz. differieren. Dieser Unterschied ist den verschiedenen Beobachtungsmethoden ohne weiteres zuzuschreiben. Bezüglich

der übrigen Werte sind die Schwankungen noch größer und liegen zwischen 37 Proz. für die Ni-Strahlung und 0 Proz. für die Se-Strahlung. Diese inkonstanten Abweichungen sind auf Kosten der Barklaschen Interpolationsmethode zu setzen. Aus den Absorptionskoeffizienten für Luft berechnen dann Barkla und Collier diejenigen eines beliebigen anderen Gases auf Grund der Beziehung

$$J_G = J_L \cdot e^{-(\mu_G - \mu_L) x},$$

wo bedeuten

J_G = Stärke der Ionisation, wenn die Absorptionskammer mit Gas gefüllt ist,

J_L = Stärke der Ionisation, wenn die Absorptionskammer mit Luft gefüllt ist,

μ_G = Absorptionskoeffizient des Gases,

μ_L = Absorptionskoeffizient der Luft,

x = Länge des Gasluftweges.

Vergleicht man die so durch Rechnung ermittelten Werte für SO_3 mit den durch das Experiment festgelegten Werten von Owen, so sind die Schwankungen der Barklaschen Werte gegenüber den Owenschen Werten bald positiv, bald negativ. Vergleicht man insbesondere die Absorptionskoeffizienten für die Cu- und Zn-Strahlung, wo wenigstens die Werte μ_L experimentell ermittelt sind, so betragen beispielsweise die Quotienten aus den Owenschen und Barklaschen Werten 1,13 und 0,95, während für Luft diese Quotienten in guter Übereinstimmung 1,20 bzw. 1,19 waren. Dieser Vergleich beweist die Unzulänglichkeit der Interpolationsmethode. Offenbar entspricht die von Barkla abgeleitete Beziehung nicht genau dem Absorptionsvorgange, indem sekundäre Erscheinungen, — wie Streuung, Diffusion — unberücksichtigt bleiben. — Aus dem Vergleich der Absorptionskoeffizienten verschiedener Gase für verschiedene K -Strahlungen hat Owen einen angenähert linearen Zusammenhang zwischen den Logarithmen der Atomgewichte der verschiedenen Strahler und den Logarithmen der Massenabsorptionskoeffizienten der verschiedenen Gase festgestellt. Danach gilt die Gleichung

$$\log \mu/\varrho = c + x \cdot \log A \text{ oder}$$

$$\mu/\varrho = c' \cdot A^x.$$

Aus der Neigung der Geraden gegen die Abszisse, auf welcher die Logarithmen der Atomgewichte aufgetragen waren, berechnete sich die Richtungstangente α angenähert zu -5 , so daß Owen das Gesetz ableitete: Die Absorbierbarkeit der charakteristischen Strahlungen in einem Gase ist umgekehrt proportional der 5 . Potenz des Atomgewichtes des strahlenden Elementes. Kaufmann¹⁾ hat darauf hingewiesen, daß dieses Gesetz auch für Metalle (Al) als absorbierende Substanz gilt, und zwar gleichermaßen für die K -Strahlung wie für die weichere L -Strahlung. Den tieferen Zusammenhang zwischen Frequenz und Absorbierbarkeit charakteristischer Strahlen fand Siegbahn.²⁾ Er beobachtete eine streng lineare Abhängigkeit zwischen den Logarithmen der Massenabsorptionskoeffizienten und den Logarithmen der Wellenlängen. Ohne Einschränkung für feste wie für gasförmige Körper gilt die fundamentale Beziehung

$$\log \mu/\varrho = B + \alpha \log \lambda \quad \text{oder}$$

$$\mu/\varrho = A \cdot \lambda^\alpha.$$

Es zeigte sich, daß α eine universelle Konstante ist. Sie beträgt sehr angenähert 3 für Gase wie für Metalle. Im Falle der kürzeren K_α -Linie lauten insbesondere die Konstanten

$$\mu/\varrho = 19 \cdot \lambda^{2.78},$$

im Falle der längeren K_β -Linie

$$\mu/\varrho = 18 \cdot \lambda^{2.87}.$$

Miller³⁾ will endlich einen funktionellen Zusammenhang zwischen Absorption und *Spannung* beobachtet haben. Danach gilt

$$\frac{\mu}{\varrho} = \frac{4.24 \cdot 10^{13}}{\nu^{2.77}}.$$

Durch quantentheoretische Berechnung bestimmt er die folgende mit der rein empirisch abgeleiteten Siegbahnschen Gleichung in bestem Zusammenhange stehende Beziehung

$$\mu/\varrho = 19.4 \cdot \lambda^{2.77}.$$

1) W. Kaufmann, Phys. Zeitschr. 14. p. 386. 1913.

2) M. Siegbahn, Phys. Zeitschr. 15. p. 753. 1914.

3) C. D. Miller, The Phys. Rev. (2) 8. p. 329. 1916.

Zweiter Teil.

Technische Unterlagen der Arbeit.

§ 1. Der Betrieb der Röntgenröhre.

Die Röntgenstrahlen wurden nach der alten klassischen Methode erzeugt mit Funkeninduktor und Unterbrecher. Zur Verfügung stand ein großes Röntgeninduktorium von 50 cm Schlagweite. Es besaß einen kräftigen Eisenkern von 10 cm Durchmesser, so daß die sekundär erzielten Leistungen entsprechend dem Eisengewicht günstige waren. Insbesondere hatte der Induktor den Vorteil, daß er bei geringer primärer Belastung (2—3 A) sehr exakt und ausreichend arbeitete. Zunächst wurde der unterbrochene Gleichstrom durch den alten Boas-Quecksilberunterbrecher erzeugt. Dieser mechanische Unterbrecher erwies sich aber in doppelter Hinsicht als unzulänglich für den Strombetrieb. Einmal war es Hauptbedingung, daß die Frequenz der Unterbrechungen genau konstant blieb, denn die Härte sowohl als auch die Intensität der Strahlung hängen in recht erheblichem Maße von der Frequenz der Röhrenstöße ab. Die auf den Boasunterbrechern montierten leichten Motoren genügen aber nur sehr unvollständig der Bedingung einer genau konstanten Tourenzahl. Vor allem waren aber diese Boasunterbrecher für einen Dauerbetrieb unbrauchbar, weil infolge der stetig zunehmenden Verschlammung des Quecksilbers die Stromverhältnisse sich dauernd etwas änderten. Infolgedessen ließ sich über längere Zeit kein vollkommen gleichmäßiger Röhrenbetrieb erreichen, wie er für die sehr empfindliche Methode der Ionisationsmessung unbedingt erforderlich war.

Alle diese technischen Schwierigkeiten waren behoben, als ich statt des Boas einen modernen Gasunterbrecher benutzte. Derselbe war mir für die ganze Dauer meiner Versuche in freundlichster Weise von den hiesigen Vefawerken zur Verfügung gestellt worden. Der Unterbrecher war schätzungsweise 120 Stunden im Betrieb, ohne daß ein Reinigen des Quecksilbers erfolgt wäre. Er arbeitete zu Anfang der Beobachtungen, obwohl er gebraucht übernommen wurde, ebenso exakt wie am Ende. Die Verschlammung des Quecksilbers war also praktisch Null. Als Dielektrikum wurde Leuchtgas benutzt. Es wurde in stetigem Strome durch den Unterbrecher

gesickt. Die Unterbrechungen selbst erfolgten so rapid und exakt, daß niemals ein Öffnungsfunk zustande kam. Deshalb war es auch ungefährlich, wenn sich ein Gemisch von Luft und Leuchtgas im Innern des Unterbrechers befanden. Allerdings arbeitete in Gegenwart von Luft die Röhre nicht so gleichmäßig, was an der größeren Unruhe des Milliamperemeters zu erkennen war. Diese Erscheinung stellte sich immer dann ein, wenn infolge der Zentrifugalkraft des Quecksilbers die Gaszuleitungen mechanisch etwas verstopft waren. Deshalb wurde in den Gasleitungskreis eine Waschflasche eingeschlossen, die mit verdünnter Salpetersäure zum Auffangen etwa auftretender Quecksilberdämpfe beschickt war. An dem Durchperlen des Gasstromes konnte man erkennen, ob die Gasleitung intakt war oder nicht. War aber diese Bedingung erfüllt, dann sprach die Röhre sehr gleichmäßig und ruhig an, das Milliamperemeter stand praktisch still und gestattete sehr genaue Ablesungen. Der Motor des Unterbrechers lief regelmäßig, die Tourenzahl war vollkommen konstant. Um den höchsten Grad der konstanten Unterbrechungsfrequenz zu erzielen, wurde der Motor vor Ausführung einer Messung etwa 5 Minuten unbelastet laufen gelassen. Nachdem alle Betriebsteile sich durch eine bestimmte Erwärmung auf einen Normalzustand eingestellt hatten, wurde die Spannung angelegt. Sie betrug 120 Volt. — In den Sekundärstromkreis waren als Hilfsapparate eingeschlossen eine Gundelachsche Ventilröhre und eine Serie von vier hintereinander geschalteten Funkenstrecken. Beide Nebenapparate dienten zur Unterdrückung der Schließungsinduktion. Die Ventilwirkung der Drosselröhre beruht auf der folgenden Konstruktion: die eine der beiden Al-Elektroden ragt weit in das Innere der Glaskugel hinein, die andere ist von dem Glashals eingeschlossen. Das Röhrenvakuum muß so hoch sein, daß Kathodenstrahlen entstehen. Durch die geradlinige Fortpflanzung der Kathodenstrahlen laden sich nun die getroffenen Glaswände statisch auf mit negativer Elektrizität. Infolgedessen ist die Wirkung der gegenseitigen Abstoßung an der eingeschlossenen Elektrode viel heftiger als an der weit in die Kugel hineinragenden Elektrode. Man schaltet die Röhre deshalb so, daß etwa entstehende Schließungsinduktion die eingeschlossene Elektrode zur Kathode macht. Da aber

die Ventilkraft der Drosselröhre nicht ausreichte, wurden außerdem vier Funkenstrecken in den Stromkreis eingeschlossen. Erfahrungsgemäß schlägt hochgespannte Elektrizität leichter über, wenn die Elektronen aus der Platte in die Spitze eintraten, wenn also nach der alten Terminologie die Spitze die Anode, die Platte die Kathode vertritt. Die Funkenstrecken besaßen in sich regulierbare Luftdistanz. Es zeigte sich, daß die Röhre besser arbeitete mit mehreren Funkenstrecken von geringer Schlagweite als mit einer Funkenstrecke großer Schlagweite. Je kürzer nämlich die Funkenstrecke ist, um so rascher erfolgt die Entionisierung des Luftweges durch das elektrische Feld zwischen den Elektroden, um so besser ist also die Löschwirkung. Lange Funkenstrecken verursachen leicht schädliche lokale Erwärmungen der Elektroden und vermindern die Entladungsspannung infolge erhöhter Ionisation, so daß der Schließungsstrom nur geringen Widerstand findet. Außerdem hat eine Serienfunkenstrecke stets ein höheres Funkendekrement als eine Einfachfunkenstrecke, deshalb ist es günstig, mit einer Mehrfachfunkenstrecke zu arbeiten, wenn man hohe Entladungsspannungen erzielen will.

Um nun die sekundären Entladungsvorgänge genau beobachten zu können, war in Serie mit der Röntgen- und Drosselröhre ein Gehrckesches Oszillographenrohr geschaltet. Dieses mit einem Edelgas gefüllte Geißlerrohr besitzt einen solchen Evakuationsgrad, daß die Erscheinung des kathodischen Glimmlichtes auftritt. Bei Gleichstrom überzieht sich die eine Elektrode mit einer dünnen Schicht weißlich-blauen Lichtes, das stets von der vordersten Spitze der stabförmigen Elektrode ausgeht und die Fläche der Kathode nach rückwärts überzieht, und zwar um so mehr, je größer die Stromstärke ist. Aus der Länge der Glimmlichtstrecke kann man also direkt auf die sekundäre Belastung schließen. Die Röhre erwies sich als ein sehr empfindlicher Indikator, die geringsten Spuren von Schließungslicht wurden angezeigt. Zur Erzeugung der Röntgenstrahlen diente eine moderne Veifa-Maximumröhre, welche für Tiefenbestrahlung, also Dauerbetrieb, bestimmt ist. Die Antikathode besteht aus einem starken Kupferzylinder mit platinbelegtem Spiegel und ist innen hohl. Durch ein motorisch angetriebenes Luftgebläse wird Wasser aspiriert und in fein verteilt Sprühnebel gegen die Rückwand des Anti-

kathodenspiegels geschleudert. Durch diese rationelle Kühlung wird der Antikathode in hohem Maße Wärme entzogen, so daß man die Stromdichte an der Röhre beträchtlich steigern kann, ohne daß ein Anstechen des Spiegels erfolgt. Erfahrene maßen wächst nun die Strahlhärte mit der Röhrenbelastung — infolgedessen liefern diese Maximumröhren eine besonders durchdringende und intensive Röntgenstrahlung. Ihre Lebensdauer ist eine relativ hohe. Die während der ganzen Versuche und Absorptionsmessungen gebrauchte Röhre brannte schätzungsweise 180 bis 140 Stunden (die mittlere Lebensdauer eines großen technischen Röntgenrohres berechnet man zu etwa 50 Brennstunden). Dabei war die Röhre wenig empfindlich gegen Stromschwankungen und ertrug relativ hohe Belastungen bei Dauerbetrieb. Da es sich herausgestellt hatte, daß während einer Absorptionsmessung die Röhre nicht regeneriert werden durfte, ließ ich die Röhre in einem weichen Zustande anlaufen bei einer Belastung von 4—5 M.-A., die sich durch langsames Härtewerden zum Schluß der Messung selbsttätig reduziert hatte auf 1,5—1,2 M.-A. Eine Messung erstreckte sich etwa über die Dauer einer halben Stunde. Die Röhre besaß eine Palladium-Fernregenerierung, die sich in sehr bequemer Weise von dem Beobachtungsplatze aus bedienen ließ. Bezüglich des Anschlusses der Röhre war Bedacht darauf gelegt, daß sie sich in genügendem Abstand von dem Induktorium befand, damit keine Ablenkung des Kathodenstrahlbündels durch das Magnetfeld des Induktors erfolgen konnte. Ein gegenseitiger Abstand von etwa 1 m erwies sich als ausreichend, so daß kein Schwanken des Fokus zu beobachten war. Die Hochspannungsleitungen waren in Glaskörpern eingeschlossen, um jeden Funkenüberschlag, der die Röntgenstrahlenentladung stören konnte, zu vermeiden. Die Schlagzahl, die durch die Röhre ging, war absichtlich nicht sehr hoch gewählt, sie betrug 1520 Unterbrechungen pro Minute. Der Motor, welcher eigentlich für 120 Volt vorgesehen war, wurde deshalb nur mit 48 Volt betrieben. Es ist nämlich ein Röntgenbetrieb um so schonender, je niedriger die Frequenz ist, weil die entsprechende Materialabnutzung geringer ist. Dazu kommt die Erfahrung, daß mit abnehmender Stoßzahl die Härte der Röhre größer wird. Nach jedem Stromdurchgang besitzt nämlich die Luft im Röhreninnern eine

gewisse Leitfähigkeit, die aber rasch abnimmt mit der Ionisationsierung. Der neue Stromstoß wird nun einen größeren oder geringeren Widerstand zu überwinden haben, je nachdem wenig oder viel Ionen vorhanden sind. Folgen die einzelnen Stromstöße in relativ großen Pausen, dann werden sich viele Ionen wiedervereinigt haben, und der Zündgipfel der Röhrenspannung muß entsprechend hoch ansteigen, bis sie den Widerstand zu durchbrechen vermag. Da nun die Strahlenhärte einzig und allein von der Röhrenspannung abhängt, so folgt mit Notwendigkeit daraus, daß mit abnehmender Stoßzahl und entsprechend hohem Zündgipfel die Härte der Strahlen größer wird. Natürlich mußte andererseits die Unterbrechungszahl so groß gewählt werden, daß die Elektroskopentladung stetig und nicht etwa ruckweise vor sich ging. — Zur Bestimmung der mittleren Strahlenqualität diente ein Härtemesser nach Benoist, der zwecks genauer Beobachtung in einen gegen diffuses Licht gut abgeblendeten dunklen Kasten, ein sogenanntes Kryptoskop, eingebaut war.

§ 2. Der Gasabsorptionsapparat.

Zwischen dem Röntgeninstrumentarium und dem Apparatsystem der Gasanalyse befand sich eine massive Schutzwand aus 1 cm dickem Blei, welche eine Länge von 100 cm und eine Höhe von 80 cm besaß. Dieser Bleischirm schützte die Gaskammern gegen direkte Bestrahlung. Soweit es möglich war, wurden die Röntgenstrahlen auch nach unten und nach den Seiten mittels alter Akkumulatorenplatten abgeschirmt. Wegen der erforderlichen Röhrenbeobachtung und der komplizierten Kühl- und Regeneriervorrichtung war es nicht möglich, die Röhre in einen allseits geschlossenen Bleikasten einzubauen. Infolgedessen war das Zimmer erfüllt mit reflektierten, zerstreuten und sekundären Röntgenstrahlen, die elektroskopisch sofort nachweisbar waren. Daher mußten die Ladesysteme der Elektroskope sorgfältig mit Blei abgedeckt werden. Bezuglich der Dimensionen der Gasabsorptionskammern mußte von vornherein Bedacht darauf gelegt werden, dieselben möglichst lang zu gestalten, sollte die Beobachtungsmethode einen Vorzug darstellen gegenüber denjenigen von Rutherford und Crowther, welche bei den

analogen Untersuchungen Längen von 20—80 cm benutzt hatten. Es wurde deshalb ein Absorptionsrohr aus Glas verwendet, das eine Länge von 184 cm besaß gegenüber einem Durchmesser von 7 cm. Die Dicke der Glaswand betrug 2 mm. Am günstigsten ist natürlich ein möglichst weites Rohr wegen der sekundären Einwirkungen der Wände. Dieser Ausdehnung war aber praktisch eine Grenze gesetzt, weil vor jeder Untersuchung die Kammer neu evakuiert werden mußte. Bei dem Durchgang der primären Röntgenstrahlen durch das Absorptionsrohr werden nämlich durch diffus verlaufende Strahlen sekundäre Elektronen aus den Wänden ausgestoßen. Die notwendige Folgeerscheinung dieser korpuskularen Strahlung ist das gleichzeitige Auftreten einer Wellenstrahlung, einer Glasfluoreszenzstrahlung. Beide Strahlungen müssen gegen das Leitfähigkeitsmeßinstrument abgeschirmt werden, weil sie die dort zu beobachtenden Intensitäten fehlerhaft beeinflussen. Dabei wird die Stärke im Auftreten dieser sekundären Strahlungen eine verschiedene sein, je nachdem das Absorptionsrohr luftleer oder gaserfüllt ist. Im 2. Falle ist nämlich infolge der größeren Trübung mit erhöhter Diffusion zu rechnen. Weiter kommen in Frage die sekundären Kathoden- und Röntgenstrahlen, welche die primären Strahlen beim Durchsetzen der festen Eintritts- und Austrittsstelle des Glasrohres erzeugen. Diese Fehlerquellen hängen aber nicht von dem Gasdruck ab, sie gehen also ohne Störung in die Beobachtungen ein, die immer nur Relativwerte darstellen, wie später gezeigt wird. Dagegen war es notwendig, die sekundären Strahlungen der Wände zu beseitigen, denn ihre Intensitäten, die wenigstens zum Teil von der verschiedenen Trübung der verwandten Medien abhängen, gingen nicht relativ in die Ionisationsmessungen ein. Nun ist aber zu erwarten, daß die durch diffus nach den Seiten verlaufende primäre Röntgenstrahlung in den Glaswänden erzeugten sekundären X-Strahlen und noch mehr die sie erzeugenden sekundären Elektronenstrahlen ein sehr geringes Durchdringungsvermögen besitzen. Nimmt man an, daß das Glas in der Hauptsache ein Doppelsilikat von Natrium und Calcium ist, so hängt die Emission der Fluoreszenzstrahlen im wesentlichen ab von den Elementen Na, Ca, Si mit den Ordnungszahlen 11(Na), 14(Si), 20(Ca). Die entsprechenden K_{α} -Linien der 3 Elemente wurden von

Sieg bahn und Stenström¹⁾ ermittelt zu $11,951 \cdot 10^{-8}$ cm, $7,181 \cdot 10^{-8}$ cm, $8,355 \cdot 10^{-8}$ cm. Es handelt sich also um sehr langwellige Strahlen. Die Verfasser mußten die Untersuchungen in einem eigens für diese Zwecke gebauten Vakuumspektrographen vornehmen (die Elemente waren direkt als Antikathodenmaterial verwendet), weil schon wenige Zentimeter Luftweg und das Röntgenrohrfenster von 0,05 mm dicker Al-Folie zur völligen Absorption der Strahlen hinreichten. Es konnte somit nicht schwer halten, die Elektronen geringer Geschwindigkeit und die langwelligen Röntgenstrahlen zur Absorption zu bringen. Um dies zu erreichen, wurde das Innere des Rohres mit einer 2-3fach gewickelten Rolle aus gewöhnlichem Packpapier ausgelegt, von welcher nun angenommen werden konnte, daß sie zur völligen Absorption der beiden sekundären Strahlungen ausreichte.²⁾ Stirn- und Rückfläche des Glasrohres trugen ebene Al-Kappen von 1 mm Dicke. Um die in das Rohr und später das Elektroskop eindringende Strahlung nicht zu sehr zu schwächen, wurden aus den Al-Kappen kreisrunde Öffnungen herausgeschnitten von 1 cm Durchmesser, über welche von außen (wegen des Atmosphärendruckes nach Evakuierung) 0,05 mm dicke Al-Folien gekittet wurden. Als Kittsubstanz diente Picein, das sich gut bewährt hat. Es wurde Sorge getragen, daß beim Kitten die Kittsubstanz sowohl als die in Frage kommenden Glas- und Aluminiumteile auf der Schmelztemperatur des Piceins gehalten wurden; dann stellte sich bei ruhigem Stehenlassen die luftdichte Verkittung von selbst her. Zeigte sich bei versuchsweisem Auspumpen das Gefüge noch nicht ganz luftdicht, so wurde nachträglich noch etwas flüssige Substanz aufgetragen, während das Rohr zum Teil luftleer war. Infolge des äußeren Atmosphärendruckes wurde dann die plastische Substanz selbsttätig in etwa vorhandene Undichtigkeitsstellen hineingetrieben. Die einmal bewerkstelligte Verkittung blieb

1) M. Siegbahn u. N. Stenström, *Phys. Zeitschr.* **17**, p. 318. 1916.

2) Eine sehr genaue Untersuchung über die verschiedenen Entstehungsmöglichkeiten sekundärer Fehlerquellen und die Größe ihrer Einwirkung bei Absorptionsmessungen an korpuskularer und elektromagnetischer Strahlung findet man in einer Arbeit von E. Friman: „Über die Absorption und Diffusion schneller Kathodenstrahlen (β -Strahlen) in Gasen und Dämpfen“, *Ann. d. Phys.* **49**, p. 373. 1916.

während der ganzen Versuche, die sich über mehr als ein halbes Jahr erstreckten, intakt. Um das Absorptionsrohr gegen die im Zimmer verlaufenden, zerstreuten und sekundären X-Strahlen zu schützen, wurde es mit 1 mm dicker Bleifolie umwickelt. Zum Auspumpen des Rohres diente eine Quecksilberhandluftpumpe, die mit einem Mac-Leod-Manometer verbunden war.

§ 8. Meßapparat und Meßmethode.

Die Absorptionsmessungen wurden nun in der Weise angestellt, daß ionometrisch die Strahlungsintensitäten beobachtet wurden, wenn die Strahlen im Absorptionsrohr durch Vakuum und durch Gas gingen. Sei J_0 die Intensität der Strahlung, die bei Vakuum im Rohre in die Ionisationskammer eindringt, J_1 die beobachtete Intensität, die zu einem Gase unter Atmosphärendruck gehört, und sei die verwendete Röntgenstrahlung vollkommen homogen, dann bestimmt sich ihr Absorptionskoeffizient μ auf Grund der Beziehung $J_1 = J_0 \cdot e^{-\mu l}$, wo l die Länge des Strahlweges im Gase darstellt. Als Leitfähigkeitsmeßinstrument diente ein Bleielektroskop, wie es nach dem Vorschlage Rutherford's für γ -Strahlmessungen allgemein verwendet wird. Dasselbe wurde mir gleichfalls von den Veifawerken (Direktor Ingenieur Dessauer) gütigst zur Verfügung gestellt. Das Aluminiumblattsystem wurde mit einer geriebenen Hartgummistange aufgeladen. Nun zeigte es sich bald nach den ersten Meßversuchen, daß die eben angedeutete einfache Beobachtungsmethode nicht anwendbar war. Es war nämlich nicht möglich, die Röhre nur wenige Minuten vollkommen konstant zu betreiben, indem sie stetig, wenn auch langsam, härter wurde. Deshalb mußte eine Standardmethode angewandt werden, welche eine genaue Kontrolle über das Härterwerden der Röhre gestattete. Es wurde deswegen ein zweites entsprechendes Glasrohr unter einem größeren Azimut gegen die Flugbahn der Elektronen aufgestellt, das stets unter Vakuum gehalten wurde. Es war in gleicher Weise wie das eigentliche Absorptionsrohr nach außen und nach innen gegen sekundäre Strahlungseinwirkungen geschützt. Die Intensitäten wurden in einem ähnlich gebauten Bleielektroskop des Instituts beobachtet. Die gegenseitige Anordnung der Rohre zeigt die Horizontalprojektion in Fig. 1. Das Gasabsorptionsrohr war unter einem Azimut $\varphi = 90^\circ$ aufgestellt, das Standardrohr

unter einem größeren Azimut $\varphi = 109^\circ 11'$. Die in die Rohre eintretenden Strahlenbündel hatten einen Durchmesser von 0,8 cm. Diaphragmen von annähernd gleicher Größe befanden sich in den Stirnwänden der Bleielektroskope. Die Zentrierung der beiden Glasrohre machte einige Mühe, weil das eintretende engbegrenzte Bündel infolge der Streuung und Diffusion sich

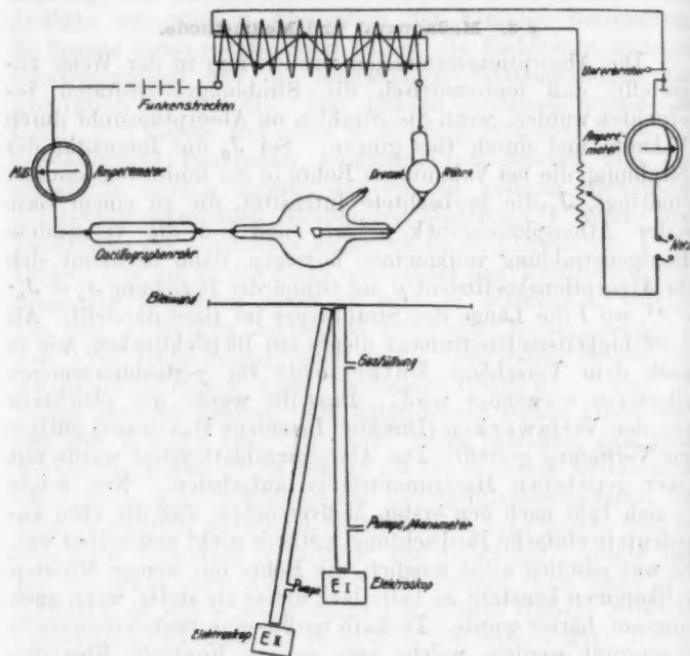


Fig. 1. Horizontalprojektion der Apparatur.

kegelförmig erweiterte. Mittels eines Leuchtschirmes gelang es, aus dem Schattenbild eines an der Rückfläche der Röhre angebrachten Drahtkreuzes das zentrale parallele Strahlenbündel in das Elektroskop-Diaphragma zu leiten. Um die beim Verlassen des Rohres in dem Aluminium etwa erzeugten Elektronen gegen den Meßraum abzuschirmen, wurde die Öffnung der Elektroskopkammer mit einer Schicht Papier abgedeckt.

Der Gang der Beobachtung ist nun der folgende: Zunächst sind beide Rohre luftleer. Sie werden im folgenden als Standardrohr, *St*, und Versuchsrohr, *V*, bezeichnet. Man beobachtet einige Male möglichst gleichzeitig die Rückgänge in beiden Elektroskopen und erhält gut übereinstimmende Quotienten. Nun wird in das Versuchsrohr das zu untersuchende Gas eingeleitet — jetzt ändert sich der Quotient der in beiden Elektroskopen wieder möglichst gleichzeitig ermittelten Rückgänge. Aus dieser Änderung der Quotienten lässt sich nun das Absorptionsvermögen in folgender Weise leicht berechnen: Sei nämlich

I. bei luftleerem Versuchsrohre

$$\frac{\text{Intensität der Strahlung durch Versuchsrohr}}{\text{Intensität der Strahlung durch Standardrohr}} = \frac{V}{St} = c$$

und

II. bei gasgefülltem Versuchsrohre

$$\frac{\text{Intensität der Strahlung durch Versuchsrohr}}{\text{Intensität der Strahlung durch Standardrohr}} = \frac{V'}{St} = c',$$

dann ist *c* ein Maß der ungehemmten Strahlungsintensität *J*₀, *c'* ein Maß der infolge der Absorption gehemmten Strahlungsintensität *J'*. Da die iontometrisch gemessenen Intensitäten durch Entladungszeiten ausgedrückt werden, welche sich umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Intensitäten, so gilt die Beziehung

$$(1) \quad J_0 : J' = \frac{1}{\sigma} : \frac{1}{\sigma'},$$

$$J' = J_0 \cdot \frac{\sigma}{\sigma'}.$$

Wegen der Absorption nach der Exponentialfunktion ist andererseits

$$(2) \quad J' = J_0 \cdot e^{-\mu l},$$

wo *μ* den Absorptionskoeffizienten, *l* die Dicke der absorbierten Gasschicht darstellt.

Aus der Gleichsetzung der beiden Beziehungen 1 und 2 folgt

$$e^{-\mu \cdot l} = \frac{c}{c'},$$

$$\mu \cdot l = \log \text{nat } c' - \log \text{nat } c,$$

$$\mu = \frac{\log c' - \log c}{l \cdot 10 \log e}.$$

Da die Rohrlänge und mithin der Gasweg 184 cm betrug, so war $(\log c' - \log c)$ im besonderen zu multiplizieren mit 0,01718.

Die Kapazitäten der beiden Elektroskope, welche durch Ladungsteilung mit einem Wulffschen Elektrometer von bekannter Kapazität bestimmt wurden, betrugen 4,21 cm bzw. 4,215 cm. Die Entladungszeiten wurden bestimmt durch direkte Beobachtung durch Okularmikroskope. Beide Elektroskope waren aufeinander geeicht, so daß der gleiche Spannungsabfall gemessen wurde. Er betrug ca. 50 Volt und lag etwa zwischen 400 und 350 Volt. Besondere Messungen ließen erkennen, daß das Gebiet der Sättigungsströme für diese Spannung erreicht war.

§ 4. Ausführliches Beispiel einer Messung.

Zunächst wurde der natürliche Rückgang der Elektroskope bestimmt. Er war sehr gering und konnte bei der Berechnung gegenüber dem starken Ionisationseffekt der Röntgenstrahlen vernachlässigt werden. Dennoch wurde er vor jeder Messung in beiden Elektroskopen genau kontrolliert, um auf diese Weise zu prüfen, ob die statische Isolation der Leitfähigkeitssysteme intakt war. Es hatte sich weiter herausgestellt, daß bei warmer, trockener Luft die Elektroskope sich besonders leicht aufluden, weil die Erzeugung der Reibungselektrizität dann eine viel stärkere war. Da nun eine gute Meßreihe möglichst rasch aufeinanderfolgende Ablesungen forderte mit geringen Zeitverlusten durch wiederholtes Laden, so wurden Luft und Apparate vor einer Messung genügend erwärmt und getrocknet, indem sie etwa eine halbe Stunde lang den Strahlen der elektrischen Deckenbeleuchtung ausgesetzt wurden. Das Versuchsröhrchen wurde nun ausgepumpt bis auf ca. $1/2$ mm Druck (höhere Verdünnungsgrade waren nicht erforderlich) und das einzuführende Gas zur raschen Einfüllung bereitgestellt. Es

wurde der Motor am Unterbrecher angelassen, damit Drahtwindungen und Eisenteile auf ihre gleichmäßige Temperatur kamen und konstante Umdrehungsgeschwindigkeit bewirkten. Die Röntgenröhre selbst wurde gut abgestaubt, damit keine Staubpartikelchen dem hochgespannten Strom den Weg über die Glaskugel vorbereiteten. Bei dem ersten Einschalten der Röhre wurde die Regenerierung kräftig und wiederholt betätigt, bis der Röhrenstrom nur langsam rückwärts ging. Die Röhre wurde nun einige Minuten laufen gelassen, damit die Induktorwindungen und Stromzuleitungen sich ebenfalls gleichmäßig erwärmen und die primäre Belastung konstante Einstellung zeigte. Die erste Vorbedingung für eine zuverlässige Messung war eben ein so gleichmäßiger Betriebszustand, wie er sich nur irgend erreichen ließ. Das Zimmer wurde nun abgedunkelt bis auf das Maß von Beleuchtung, welches zum Ablesen notwendig war, damit die Wechselfärbung der Röntgenröhre, welche ein gutes Kriterium für ihren jeweiligen Zustand gibt, gut zu beobachten war. Oberhalb des Bleischirmes war an einem Rahmen drehbar ein Spiegel angebracht, so daß sich von dem Beobachtungsplatze an dem Elektroskop aus die Röhre und Regenerierzvorrichtung kontrollieren ließen. In der Tab. 2 sind die Ergebnisse einer Meßreihe zusammengestellt. Die 3. Vertikale enthält den gegenseitigen Zeiteinsatz der Ablesungen in Sekunden. +20 bedeutet, daß die Ablesung im Elektroskop I 20 Sekunden früher erfolgte als im Elektroskop II, -20 würde bedeuten, daß sie im Elektroskop I 20 Sekunden später einsetzte. Bei einer guten Ablesung mußte die Ablesung im Elektroskop I zeitlich früher einsetzen, weil die Entladungsdauer hier wegen der geringeren Empfindlichkeit des Systems mehr als $1\frac{1}{4}$ mal so groß war. Fielen die Quotienten der Rückgänge zu ungleich aus, so gab die gegenseitige Zeitkontrolle ein richtiges Kriterium, welcher Quotient größere Zuverlässigkeit beanspruchen durfte. Gleichzeitig wurden die sekundären Stromstärken notiert. Sie sind aufzufassen als mittlere Stromstärken während der Entladungszeiten, mit welchen sie in eine Horizontale gesetzt sind. Die letzten Kolonnen enthalten die beobachteten primären Stromstärken und die Zeitangabe der Beobachtung. Die Standardmessungen hat meine gute Mutter ausgeführt.

Tabelle 2.

Entladungszeiten in Sekunden	Gegenseitiger Anfang der Ablesung in Sek.	Sekundäre Stromstärke in M. A.	Primäre Stromstärke in A.	Zeit der Be- obach- tung
Elektro- skop I	Elektro- skop II			
146,7	108,7	+ 65	3,1 — 3,0	2,84
135	96,8	+ 31	3,0 — 2,9	2,85
119,5	82,8	+ 46	2,9 — 2,82	—
108	71,1	+ 65	2,81 — 2,75	—
96	63,5	+ 5	2,7 — 2,65	2,84
82,4	55	+ 16	2,62 — 2,6	2,86
78	50,8	+ 15	2,6 — 2,55	—
68	45,2	+ 12	2,5	—
63,7	41,4	+ 4	2,45	2,85
59	39,5	+ 22	2,42	2,86
55	36	- 1	2,4	—
50	32	+ 20	2,3	—

$$146,7 : 108,7 = 1,35 \dots$$

$$135,0 : 96,8 = 1,39 \dots$$

$$119,5 : 82,8 = 1,44 \dots$$

$$108,0 : 71,1 = 1,5189$$

$$96 : 63,5 = 1,5118$$

$$82,4 : 55 = 1,5000$$

$$78 : 50,8 = 1,5354$$

$$68 : 45,2 = 1,5054$$

$$63,7 : 41,4 = 1,5386$$

$$59 : 39,5 = 1,4936$$

$$55 : 36 = 1,5277$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mittelwert: } 1,5163 = c \\ \text{Mittelwert: } 1,6580 = c' \end{array} \right\}$$

Nun wurde Gas eingelassen (die Röhre brannte weiter).

Entladungszeiten in Sekunden	Gegenseitiger Anfang der Ablesung in Sek.	Sekundäre Stromstärke in M. A.	Primäre Stromstärke in A.	Zeit der Be- obach- tung
Elektro- skop I	Elektro- skop II			
46,3	28,7	+ 8	2,27	2,81
42,5	26	- 5	2,2	—
37,2	22,5	+ 1	2,18	—
32,3	19,5	0	2,1	—
27,25	16	+ 11	2,0	—
24,45	15	+ 8	1,95	—
22,3	13	0	1,85	2,85
20,5	11,3	+ 20	1,81	—

$$46,3 : 28,7 = 1,6132$$

$$42,5 : 26 = 1,6346$$

$$37,2 : 22,5 = 1,6533$$

$$32,3 : 19,5 = 1,6564$$

$$27,25 : 16 = 1,7031$$

$$24,45 : 15 = 1,6300$$

$$22,3 : 13 = 1,7154$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mittelwert: } 1,6580 = c' \end{array} \right\}$$

Die ersten Quotienten c konnten zur Berechnung des Mittelwertes nicht benutzt werden. In diesem weichen Röhrenzustande war die ungerichtete Strahlung der Pt-Antikathode stark überlagert von der dissymmetrisch verteilten gerichteten Bremsstrahlung. Infolgedessen fielen die ersten Quotienten zu klein aus. Diese Erscheinung wird in Teil IV der Arbeit diskutiert.

Setzt man die Werte c und c' in die oben abgeleitete Formel ein, so erhält man für diesen besonderen Fall als Wert für den Absorptionskoeffizienten

$$\mu = 0,0008884 \text{ cm}^{-1} = 8,884 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}.$$

Dritter Teil.

Untersuchungen über das Absorptionsvermögen von Gasen.

§ 1. Ergebnisse der Messungen.

Die im folgenden angeführten Resultate wurden im Laufe eines guten Monats gewonnen. Es waren verhältnismäßig viele Vorversuche notwendig gewesen, bis die Versuchsbedingungen auf einen solchen Zustand gebracht werden konnten und bis diejenige Fertigkeit in der gegenseitigen Meßtechnik erreicht wurde, daß die Einzelergebnisse nun nicht mehr beträchtliche Schwankungen aufwiesen. Es gelang schließlich, die Zuverlässigkeit der Resultate so weit zu steigern, daß die zahlenmäßigen Abweichungen nunmehr nur noch innerhalb der 2. Zifferndezimale auftraten. Luft, Kohlendioxyd, Stickstoff waren zuerst untersucht worden — die Untersuchungen wurden zum Schlusse nochmals wiederholt, um sich zu überzeugen, daß die neu erhaltenen Daten mit den ersten innerhalb der Beobachtungsfehler übereinstimmten, wodurch die Stabilität der Betriebsverhältnisse gewährleistet war. Zu bemerken ist, daß bei Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlendioxyd, Chlormethyl die Strahlung durch 2 mm Al filtriert wurde, während bei Schwefeldioxyd, das in den ersten Wochen zur Untersuchung gelangte, durch 3 mm Al filtriert wurde. Ich ahnte damals nicht, daß die etwas stärkere Filterwirkung einen so beträchtlichen Einfluß auf die Größe des Absorptionskoeffizienten haben würde, wie sich später herausstellte. Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Chlormethyl, Schwefeldioxyd waren in komprimiertem Zustande in stählernen Bomben be-

zogen — Kohlendioxyd wurde teilweise aus dem Kippsschen Apparate, teilweise aus einer Bombe eingeleitet. Die Ergebnisse waren dieselben innerhalb der Beobachtungsfehler. Es wurde der Gasentnahme aus der Bombe der Vorzug gegeben, weil die Füllung des Rohres auf diese Weise innerhalb einer halben Minute vollzogen werden konnte und es im Interesse der Messung lag, das Zeitintervall zwischen den beiden Beobachtungsreihen im ungefüllten und im gefüllten Zustande so kurz wie möglich zu bemessen. Um die Beobachtungseffekte etwas zu steigern, wurde die Absorption zumeist unter geringem Überdruck bestimmt. Allerdings durften der Apparatur nicht mehr wie 15 cm Überdruck zugemutet werden, da die Kittung der Lenardschen Fenster derart vorgenommen worden war, daß bei Vakuum der Außendruck ausgehalten werden sollte. Die im folgenden angeführten Absorptionskoeffizienten sind auf den Druck einer Atmosphäre umgerechnet. Es wurde weiter Bedacht darauf gelegt, die verschiedenen Gase bei möglichst gleicher Zimmertemperatur zu untersuchen, weil nur dann allein die Zahl der Gasmoleküle innerhalb des untersuchten Volumens eine annähernd konstante ist und die ermittelten Absorptionskoeffizienten die relativen Molekülbzw. Atomabsorptionen der verschiedenen Gase darstellen. Diese Regulierung der Zimmertemperatur ließ sich leicht bewerkstelligen. Das Absorptionsvermögen von Schwefeldioxyd ist auf Grund einer später zu erklärenden Beziehung auf 2 mm Al-Filter umgerechnet.

Stickstoff.

$$\mu = 5,803 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

5,306

5,389

4,619

5,647

$$\text{Mittel: } \mu = 5,313 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

Luft.

$$\mu = 6,119 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

6,441

5,488

6,147

$$\text{Mittel: } \mu = 6,048 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

Kohlendioxyd.

$$\mu = 6,560 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

6,265

6,818

6,107

6,331

$$\text{Mittel: } \mu = 6,420 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

Sauerstoff.

$$\mu = 7,955 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

7,384

7,483

$$\text{Mittel: } \mu = 7,607 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

Wasserstoff.

$$\mu = -3,779 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\mu = -1,684 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

Methylchlorid.

$$\mu = 3,2604 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

2,8348

3,0172

3,0141

$$\text{Mittel: } \mu = 3,0316 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

Schwefeldioxyd (3 mm Al-Filter).

$$\mu = 1,4721 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

1,8952

1,4231

1,4925

1,7182

1,8399

1,5900

1,5428

$$\text{Mittel: } \mu = 1,6217 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

Auf 2 mm Al-Filter umgerechnet:

$$\mu = 2,4326 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}.$$

§ 2. Diskussion der Ergebnisse.

Bezüglich der Absorptionsmessung an Wasserstoff zeigte sich gegen Erwarten in 2 Vorversuchen ein geringer Absorptionseffekt, der aber größer ausfiel, als sich mit Wasserstoff

vereinen ließ. Er mußte Verunreinigungen des Gases zugeschrieben werden, zumeist einem Teilgehalte an Sauerstoff. Deshalb wurde der Gasstrom vor Beschickung des Absorptionsrohres durch 2 Waschflaschen geleitet, die mit einer stark oxydationsfähigen alkalischen Pyrogallussäurelösung gefüllt waren. Nun zeigte sich in 2 Meßreihen, die technisch als gut anzusprechen waren, ein negativer Absorptionseffekt, der seinem absoluten Betrage nach etwa 8mal geringer war wie der erstmals konstatierte. Damit war bewiesen, daß, falls dem Wasserstoff überhaupt ein Absorptionsvermögen zukam, es sich mit dieser Apparatur nicht bestimmen ließ. Dazu mußte der Gasweg sehr viel länger sein. Setzt man annähernd das Absorptionsvermögen von Wasserstoff gleich Null, so zeigen die letzten Versuche, daß Schwankungen in den Werten, die auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sind, bei guten Messungen erst in der 5. Dezimale auftreten.

Im folgenden soll versucht werden, die Relativwerte der Molekül- bzw. Atomabsorptionen abzuleiten. War die Zimmertemperatur während der verschiedenen Meßreihen konstant, so war das Avogadro'sche Gesetz erfüllt, und der Absorptionsweg der Strahlen enthielt eine gleiche Zahl von Molekülen. Die Absorptionskoeffizienten, welche die Absorption pro Dickeinheit messen, waren anzusprechen als Relativwerte der Absorptionsvermögen der einzelnen Gasmoleküle. Bezüglich einer Gasmischung, bei der keine gegenseitige Atombindung vorhanden ist, muß die Absorption der Mischung eines Volumens gleich sein den Teilabsorptionen der in der Mischung enthaltenen Stoffe. Seien in der Mischung N Teile enthalten, die sich zusammensetzen aus n_1, n_2, \dots Teilen verschiedener Stoffe, so daß gilt $N = \Sigma n$, und sei M das Absorptionsvermögen der Mischung, μ_1, μ_2, \dots das der einzelnen Mischungskomponenten, so ist zu erwarten in Übereinstimmung mit dem Erfahrungssatze von Benoist, daß

$$N \cdot M = \Sigma n \mu.$$

Unter Benutzung der für Stickstoff und Sauerstoff gefundenen Werte μ berechnete sich nach dieser Mischungsregel das Absorptionsvermögen von Luft zu $\mu = 5,77 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$, während der experimentell ermittelte Wert $6,04 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ betrug. Nimmt man an, daß der theoretische Wert wahr-

scheinlich etwas zu klein ist wegen Trübungen im Absorptionsvorgang durch Gegenwart von Kohlensäure und Spuren von Edelgasen von teilweise erheblichem Atomgewicht, so liegt der übrige Unterschied wohl innerhalb des Bereiches der Beobachtungsfehler. Nun läßt sich aber, wie aus den experimentellen Daten hervorgeht, diese Mischungsregel nicht uneingeschränkt auf chemische Verbindungen übertragen, wie dies Benoist vermutete und auch noch Thomson¹⁾ glaubte. Eine derartige Auffassung ist auch schwer vereinbar mit der modernen Vorstellung des Absorptionsvorganges. Erfolgte die Absorption auch im Falle der chemischen Bindung nach einem Additivgesetz, dann müßte das Absorptionsvermögen von CO_2 notwendig größer sein als das von Sauerstoff, was durch das Experiment widerlegt wird. Es wurden daraufhin die Werte von Owen und Barkla für homogene primäre X-Strahlen geprüft. Unter Vernachlässigung der Wasserstoffabsorption ließ sich aus den Barklaschen Werten für Schwefelwasserstoff und Schwefelioxyd das Absorptionsvermögen von Sauerstoff für die verschiedenen Strahler berechnen — es ergab sich als annähernd genau so groß wie das von Kohlendioxyd, welches Owen experimentell bestimmt hat —, jedenfalls nicht kleiner. Analoge Beobachtungen wurden auch von anderer Seite gemacht. So wurde z. B. verschiedentlich gezeigt, daß das Absorptionsvermögen von Luft gleich dem von Wasser ist, berechnet auf äquivalente Dichten. Für Wasser hängt die Absorption lediglich vom Sauerstoff ab, für Luft von den im periodischen System zunächst stehenden Elementen Stickstoff und Sauerstoff. Nun ist die Röntgenstrahlabsorption wohl mehr oder weniger aufzufassen als ein Resonanzphänomen. Die ankommenden elektromagnetischen Impulse versetzen die Elektronen des Moleküls in Schwingungen, erzwungene Schwingungen sowohl als Eigenschwingungen, und verlieren hierbei an Energie. Diese Energieverluste finden ihren Ausdruck in dem beobachtbaren Absorptionsvermögen. Nach der modernen Auffassung richtet sich nun die Durchlässigkeit eines elementaren Stoffes gegen Röntgenstrahlen nicht nach seinem Atomgewicht, wie Benoist glaubte, sondern nach seiner Ordnungszahl. Diese ist aber identisch mit der Keinladung des Atoms nach der van den

1) J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, dtch. herausg. von E. Marx, Leipzig 1906, p. 260.

Broekschen¹⁾ Hypothese, also auch mit der Zahl der Elektronen, die man sich nach Bohr²⁾ in konzentrischen Ringen um den Kern kreisend denkt. Je höher nun die Kernladung eines Atoms ist, um so mehr Energie ist erforderlich, die entsprechend größere Zahl von Elektronen in Schwingungen zu versetzen. Es ist nun nicht zu erwarten, daß ein Molekül in chemischer Verbindung sich gegen Röntgenwellen verhält wie in elementarem Zustande. Vermöge der wechselseitigen Bindekräfte der zu einem Verbindungsmolekül zusammengetretenen Elementarmoleküle dürfte der Freiheitsgrad der Schwingungsfähigkeit eines Elektronensystems in chemischer Bindung verringert sein. Es besitzt jedes Verbindungsmolekül ein *mittleres Absorptionsvermögen*, das sich folgendermaßen ableiten läßt: Sei $A_1 B_2 C_3 \dots N_n$ die chemische Gleichung des Verbindungsmoleküls, dann setzt sich das mittlere Absorptionsvermögen additiv zusammen aus dem $\frac{1}{1+2+\dots+n}$ fachen des Absorptionsvermögens von A , dem $\frac{2}{1+2+\dots+n}$ fachen desjenigen von B und so fort. Unter dieser Voraussetzung werden im folgenden die Molekülabsorptionen von C, Cl, S berechnet. Sie werden der Abkürzung halber im folgenden mit μ_C , μ_{Cl} usw. bezeichnet. Da Kohlendioxyd zu $\frac{2}{3}$ Teilen aus Sauerstoff und $\frac{1}{3}$ Teil aus Kohlenstoff besteht, bestimmt sich die Gesamtabsorption additiv aus dem $\frac{2}{3}$ fachen der Sauerstoffabsorption und dem $\frac{1}{3}$ fachen der Kohlenstoffabsorption. Auf diese Weise erhält man als Absorptionskoeffizient von Kohlenstoff $\mu_C = 4,04 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$. Wie erwartet, ist der Absorptionskoeffizient kleiner als derjenige von Stickstoff. μ_N hält dabei recht annähernd die Mitte zwischen μ_O und μ_C . μ_{Cl} berechnet sich aus dem Absorptionsvermögen von Methylchlorid. Vernachlässigt man wieder den Anteil des Wasserstoffs an dem Absorptionsvorgange, dann beruht die Absorption zur Hälfte auf der Beteiligung des Chlors, zur Hälfte auf derjenigen von Kohlenstoff. Danach erhält man als Relativwert der Molekülabsorption von Chlor $\mu_{Cl} = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$. Wenn dem Wasserstoff aber ein Absorptionseffekt zukommt und sei er auch noch so klein, dann wird die mole-

1) A. van den Broek, Phys. Zeitschr. 14. p. 32. 1913.

2) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 1, 476, 857. 1913.

kulare Absorption von Chlor größer, weil eben dann nur ein Fünftel der Gesamtabsoption auf das fünfseitig gebundene Chloratom fällt; dann wird μ_{Cl} etwa doppelt so groß. Für den elementaren Schwefel bestimmt sich unter den gleichen Voraussetzungen der Absorptionskoeffizient μ zu $\mu_s = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$. μ_{Cl} und μ_s wären demnach gleich groß. Das ist aber nicht möglich. So wird man dazu geführt, dem Wasserstoff allerdings ein gewisses Absorptionsvermögen zuzusprechen. Das lehrt auch die Betrachtung der Barklaschen Werte. Berechnet man hier für die verschiedenen Fluoreszenzstrahlen unter Vernachlässigung der Wasserstoffabsorption den Absorptionskoeffizienten von Sauerstoff, μ_0 , aus den Verbindungen SH_2 und SO_2 und bildet die Quotienten

$$\mu_0/\mu_{\text{Luft}}, \mu_{\text{SH}_2}/\mu_{\text{Luft}}, \mu_{\text{SO}_2}/\mu_{\text{Luft}},$$

so erhält man sehr schwankende Werte, wie aus Tab. 8 hervorgeht.

Tabelle 8.

Strahler	μ_{Luft}	μ_{SH_2}	μ_{SO_2}	μ_0	μ_0/μ_{Luft}	$\mu_{\text{SH}_2}/\mu_{\text{Luft}}$	$\mu_{\text{SO}_2}/\mu_{\text{Luft}}$
Fe	.020	.204	.24	.054	2,7	10,1	11,9
Co	.016	.181	.24	.028	1,75	10,9	12,5
Cu	.010	.121	.134	.019	1,9	11,1	12,3
Br	.004	.044	.05	.009	2,25	7,8	10,3
Ag	.0007	.006	.007	.003	4	11,3	12,8

Die Quotienten $\mu_{\text{SO}_2}/\mu_{\text{Luft}}$, $\mu_{\text{SH}_2}/\mu_{\text{Luft}}$ zeigen einen gegenseitig gleichartigen Gang, während das für die Werte μ_0/μ_{Luft} nicht gilt. Die Anomalie ist nur zurückzuführen auf die vernachlässigte Wasserstoffabsorption.

Trägt man nun die Molekülabsorptionen

$$\mu_{\text{C}} = 4,04 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}, \mu_{\text{N}} = 5,31 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1},$$

$$\mu_0 = 7,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}, \mu_s = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1},$$

$$\mu_{\text{Cl}} \text{ ca. } 10,0 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

gegen die Ordnungszahlen graphisch auf, so erhält man eine stetige Kurve, die in ihrem Charakter den Benoistschen Isotransparenzkurven analog ist.

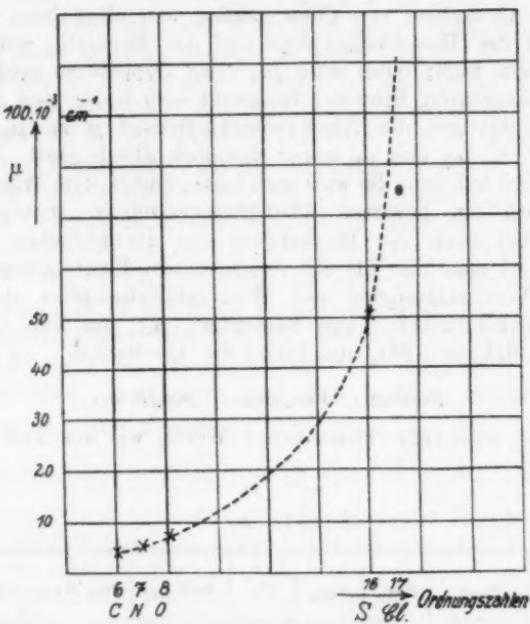


Fig. 2.

§ 8. Über das Verhalten der Quotienten der Absorptionskoeffizienten zweier Gase für verschiedene harte Strahlungen.

Der Quotient der Absorptionskoeffizienten zweier gasförmiger Medien ist nur innerhalb eines verhältnismäßig engen Spektralbereiches der verwendeten homogenen Röntgenstrahlen konstant und wird langsam immer kleiner, je kurzwelliger die Strahlung wird. So schwanken die Quotienten $\mu_{\text{CO}_2}/\mu_{\text{Luft}}$ der Owenschen Werte zwischen 1,79 für die Fe-Strahlung und 1,69 für die Mo-Strahlung. Für die vielmals härteren Strahlen der Veifa-Maximumsröhre ist $\mu_{\text{CO}_2}/\mu_{\text{Luft}}$ nur noch 1,08. Ebenso beträgt bei Owen $\mu_{\text{CO}_2}/\mu_{\text{Luft}}$ annähernd 10 im untersuchten Spektralbereich — hier nur noch 4. In dem Maße, wie die benützten Strahlen kurzwelliger werden, werden die Quotienten kleiner. Diese Beobachtung findet ihre Parallele bei den γ -Strahl-Messungen. Hier zeigt es sich, daß nach Ver suchen von Soddy und Russell¹⁾ die Massenabsorptions-

1) F. Soddy u. A. S. Russell, Phil. Mag. 18. p. 620. 1909.

koeffizienten $100 \mu/\varrho$ für Metalle von Kupfer abwärts bis zu den leichtesten festen Körpern, wie Schwefel und Paraffin, einem bestimmten Grenzwert zustreben, der mit recht großer Annäherung 4 ist. Hier gilt also $\mu_1/\varrho_1 : \mu_2/\varrho_2 = 1$, eine Tendenz, die sich bei den Röntgenabsorptionsmessungen auch zeigt, indem beispielsweise für die Fe-Strahlung $\mu_{\text{Co}}/\varrho_{\text{Co}} : \mu_{\text{Luft}}/\varrho_{\text{Luft}} = 1,17$ ist, für die Mo-Strahlung nur noch 1,10. Bei Schwefeldioxyd und Luft sind die entsprechenden Quotienten 4,62 für die weiche Eisenstrahlung und 4,5 für die härtere Mo-Strahlung. Wenn Rutherford für den Quotienten $\mu_{\text{Co}}/\mu_{\text{Luft}}$ 1,57 erhielt, Thomson 1,53, so lag das daran, daß Thomson mit einer etwas härteren Strahlung arbeitete. (Vgl. J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, deutsch, herausgegeben von E. Marx, p. 260. 1906.) Im übrigen war es mehr oder weniger Zufall, daß die Absorptionskoeffizienten hier annähernd den Dichten proportional waren, von welcher Voraussetzung die Verfasser ausgingen.

§ 4. Über die Abhängigkeit des Absorptionsvermögens eines Gases von dem herrschenden Drucke.

Es wurden Versuche angestellt, um die zu verschiedenen Partialdrucken gehörenden Absorptionskoeffizienten zu bestimmen. Als Gas wurde Chlormethyl gewählt wegen seines hohen Absorptionsvermögens. Der niedrigste Druck, für den noch eine Bestimmung möglich war, betrug 19 cm. Tab. 4 enthält die aus 2—3 verschiedenen Messungen erzielten Mittelwerte.

Tabelle 4.

Partialdruck	Spez.-Gew. $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	$\mu (\text{cm}^{-1})$	$\mu/\varrho (\text{cm}^2 \text{ g}^{-1})$
80	$230,45 \cdot 10^{-3}$	$259,7 \cdot 10^{-3}$	1,07
60	181,9	198,1	1,09
36	109,15	122,8	1,12
22	66,7	91,45	1,36
19	57,6	83,8	1,45

Trägt man die Partialdrücke gegen die entsprechenden Absorptionskoeffizienten graphisch auf (Fig. 3), so zeigt es sich, daß innerhalb des untersuchten Gebietes die Absorption proportional mit dem Drucke geht.

Diese Erscheinung war zu erwarten, denn der Druck ist ja nur ein Bild für das zahlenmäßige Vorhandensein absorbierender Moleküle. Leider war die Meßmethode nicht empfindlich genug, um den Absorptionsvorgang bei noch kleineren Drucken zu verfolgen. Es ist nämlich nicht anzunehmen, daß die Beziehung für kleinere Partialdrucke als 20 cm weiter linear bleibt, denn die Kurve muß ja beim

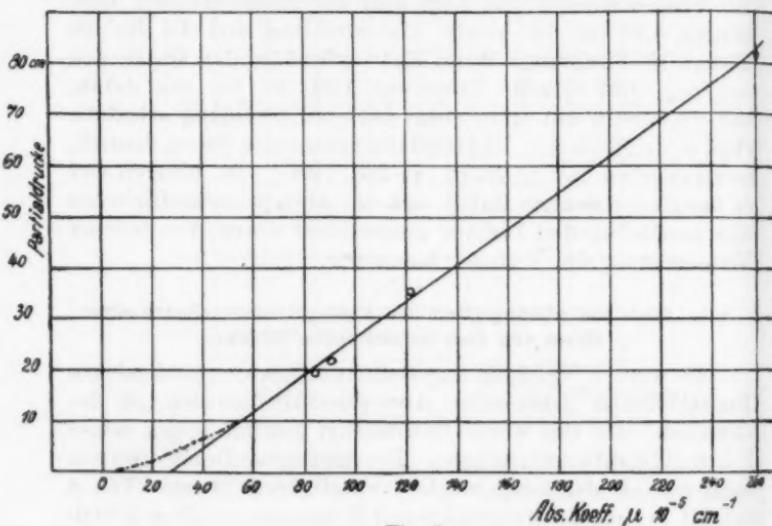


Fig. 3.

Drucke Null die Absorption Null erreichen. Die Absorptionsvermögen müssen also bei Drucken zwischen 0 und 20 cm in stärkerem Maße abnehmen, wie die Drucke kleiner werden. Man kann sich vorstellen, daß bei genügender Verdünnung die freien Weglängen der einzelnen Moleküle so groß geworden sind, daß infolge der erhöhten Bewegungsfreiheit weniger Moleküle sich an der Absorption beteiligen, als solche zahlenmäßig dem herrschenden Drucke entsprechen. Crowther¹⁾ gelang es übrigens, eine lineare Abhängigkeit bis herunter zum Drucke Null zu konstatieren. Die Abweichung gegenüber den vorliegenden Untersuchungen dürfte sich erklären lassen

1) J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. (A) 82, p. 103. 1909.

durch die Verwendung verschieden harter Strahlungen. Indem Crowther eine weichere Strahlung zur Verfügung stand, war mehr Gelegenheit gegeben, daß selbst bei niedrigen Drucken trotz der hohen Eigengeschwindigkeit die relativ langsam Röntgenimpulse sämtliche auf dem Strahlungswege sich bewegenden Molekülen zur Absorption anregten.

§ 5. Über die Neigung der Absorptions-Druck-Geraden.

Aus der linearen Beziehung zwischen dem Absorptionskoeffizienten und dem Gasdruck folgt, daß für einen beliebigen Partialdruck π/p (π = vorhandener Gasdruck, p = Normaldruck) der Absorptionskoeffizient μ_π/p einmal dem Partialdrucke π/p , dann dem Absorptionskoeffizienten μ_p proportional ist, in Zeichen:

$$\mu_\pi/p \sim \mu_p \cdot \pi/p,$$

oder

$$\mu_\pi/p = \kappa \cdot \pi/p \cdot \mu_p.$$

Wäre die Absorptionsdruck-Gerade unter genau 45° gegen die Abszisse geneigt, dann wäre $\kappa = 1$. Da der Neigungswinkel aber kleiner als 45° ist, muß notwendig $\kappa < 1$ sein. Setzt man insbesondere

$$l \cdot \mu_\pi/p = - \ln \frac{J'}{J_0},$$

so erhält man

$$- l \cdot \kappa \cdot \pi/p \cdot \mu_p = \ln \frac{J'}{J_0},$$

oder

$$J' = J_0 \cdot e^{-\kappa \cdot \pi/p \cdot l \cdot \mu_p}.$$

Untersucht man verschiedene Gase bei einer und derselben Strahlung, dann stellt κ offenbar eine Konstante für das untersuchte Gas dar und hat für ein dichtes Gas einen kleineren Wert als für ein weniger dichtes Gas. Die Strahlung wird nämlich auf dem Wege durch das Medium etwas filtriert. Dabei wird die Filterwirkung um so größer, unter je höherem Druck das Gas steht. Infolgedessen ist zu erwarten, daß für den Druck einer Atmosphäre der Absorptionskoeffizient kleiner als doppelt so groß wird wie für den Druck einer halben Atmosphäre (er betrug bei Chlormethyl $252 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$ bei 80 cm Druck gegen $140 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$ bei 40 cm Druck). So erklärt es sich auch, daß die Werte μ/p von Chlormethyl für

höhere Drucke kleiner als für niedrigere Drucke sind, indem die bei hohen Drucken bestimmten Absorptionskoeffizienten relativ zu klein ausfallen gegenüber den bei niedrigen Drucken gewonnenen Werten. Im Gegensatz zu dieser Beobachtung glauben Rutherford und Clung¹⁾ eine Konstanz des Massenabsorptionskoeffizienten μ/ρ für Luft bei verschiedenen Drucken zwischen $\frac{1}{2}$ und 3 Atmosphären gefunden zu haben. Ihre Versuchsergebnisse, aus welchen sie ihre Vermutung folgern, sind in Tab. 5 wiedergegeben:

Tabelle 5.

Druck in Atm.	μ/ρ in Luft
0,5	0,244
1,0	0,223
2,0	0,588
3,0	0,222

Betrachtet man die Werte genauer, so zeigt sich keineswegs eine Konstanz des Massenabsorptionskoeffizienten. Im Gegenteil zeigen die Werte μ/ρ genau wie oben einen gewissen Gang, indem sie mit zunehmendem Drucke kleiner werden (bis auf eine Ausnahme). Für Chlormethyl ist die Abhängigkeit des Massenabsorptionskoeffizienten von dem herrschenden Drucke allerdings erheblich größer als bei Luft. Die Ursache der Erscheinung muß in der 1,8fachen Dichte des Chlormethyls bezogen auf Luft gesucht werden.

§ 6. Über die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Größe der Filterwirkung.

Jede inhomogene Röntgenstrahlung härtet sich selbstdäig beim Durchsetzen von Materie, indem die weicheren Komponenten in größerem Maße absorbiert werden als die härteren Bestandteile. Infolgedessen wird der Absorptionskoeffizient um so kleiner, auf je längerem Wege die Strahlung Substanz durchsetzt hat. Es wurden nun Versuche angestellt, die dazu dienen sollten, für verschiedene Filterdicken die zugehörigen Absorptionsvermögen zu bestimmen. Als absorbierendes Gas diente Chlormethyl. Filtriert wurde die Strahlung durch

1) E. Rutherford u. McClung, I. c.

Aluminium variabler Dicke, das bei seiner niedrigen Ordnungszahl im Bereich der harten Strahlung des Platin-Antikathodenrohres kein Gebiet selektiver Absorption besitzt. Die erste physikalische Meßreihe zu einer präzisen Bestimmung des Absorptionsverlaufes einer inhomogenen Röntgenstrahlung, wie man sie aus einem technischen Röntgenrohre erhält, stammt von Seitz¹⁾ aus dem Jahre 1908. Seine Beobachtungen be-

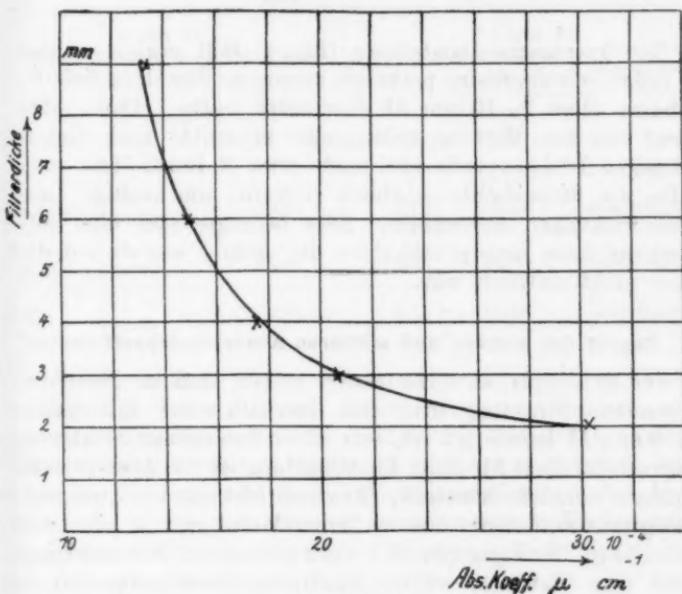


Fig. 4.

ziehen sich auf ein relativ weiches Rohr (die Induktorspannung betrug nur 23 000 Volt). Erst nachdem die inhomogene Strahlung durch etwa 8 Stanniolblätter (0,0177 mm dick) fortgenommen war, wurde eine praktisch homogene Strahlung beobachtet. Dabei überwog die inhomogene Strahlung sehr beträchtlich, sie betrug nach Seitz etwa 98 Proz. der Gesamtstrahlung. Tab. 6 bringt die Zusammenstellung eigener entsprechender Beobachtungen.

1) W. Seitz, Ann. d. Phys. 27. p. 301. 1908.

Tabelle 6.

Filterdicke des Aluminiums in mm	Abs.-Koeff. cm^{-1}
2	$80,0 \cdot 10^{-4}$
3	20,6
4	17,5
6	14,9
9	13,3

Die graphische Darstellung (Fig. 4) läßt erkennen, daß die Röhre erst dann eine praktisch homogene Strahlung lieferte, nachdem diese 9—10 mm Al durchsetzt hatte. Dann aber betrug die zur Messung gelangende Intensität nach Untersuchungen Dessauers¹⁾ nur noch etwa 8 Proz., und man mußte die Stromdichte erheblich steigern, um kräftige Ionisationswirkungen zu erzielen. Dies bedingte aber eine entsprechend hohe Inanspruchnahme der Röhre, wie sie auf die Dauer nicht statthaft war.

§ 7. Begriff des wahren und mittleren Absorptionskoeffizienten.

Die Messungen an Chlormethyl zeigen, daß im Falle der verwendeten Strahlung man erst oberhalb einer Filtergröße von 9 mm Al berechtigt ist, von einer homogenen Strahlung zu sprechen. Erst für diese Reststrahlung ist das Absorptionsvermögen nunmehr konstant. Ihr entspricht also ein „wahrer“ Absorptionskoeffizient, der in keiner Weise von x , also der Wellenlänge, abhängig ist. Bei einer geringeren Filterwirkung müßte man statt des wahren Absorptionskoeffizienten einen „scheinbaren mittleren“ Absorptionskoeffizienten einführen, der außer von der Wellenlänge auch von der Intensität der Strahlung abhängt. Die auf Grund der vorstehenden Messungen erhaltenen Absorptionskoeffizienten sind infolge der geringeren Filterwirkung nur mittlere Absorptionskoeffizienten. Es ist infolgedessen nicht korrekt, das für den Absorptionskoeffizienten gebräuchliche Symbol μ zu verwenden — wenn ich es dennoch tat, so geschah es, um mit der übrigen Röntgenliteratur in Übereinstimmung zu bleiben.

1) F. Dessauer, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstrahlen 28, p. 220. 1915/16.

§ 8. Absorptionsmessungen bei 5 mm Al-Filterstärke.

Es wurden für Sauerstoff, Stickstoff, Luft, Kohlendioxyd besondere Absorptionsmessungen angestellt, wenn die Strahlung durch 5 mm Al filtriert war. Die beobachteten Werte der Absorptionskoeffizienten sind in Tab. 7 zusammengestellt.

Tabelle 7.

Gas	5 mm Al Scheinbarer Abs.-Koeff.	Mittelwert	$\mu_2 \text{ mm}/\mu_5 \text{ mm}$	3 mm Al Scheinbarer Abs.-Koeff.	μ/q 2 mm	μ/q 5 mm
Sauerstoff	$44,00 \cdot 10^{-5}$ 43,90 42,58	$43,48 \cdot 10^{-5}$	1,75	$76,07 \cdot 10^{-5}$	0,543	0,311
Stickstoff	30,9 30,19	30,54	1,77	58,18	0,428	0,243
Kohlendioxyd	36,82 38,88	37,85	1,69	64,20	0,325	0,192
Luft	35,16 32,75	33,95	1,71	60,48	0,490	0,263

In der fünften Kolonne sind nochmals die Absorptionskoeffizienten für die durch 2 mm filtrierte Strahlung eingetragen. Die vierte Kolonne enthält die Quotienten aus den Absorptionskoeffizienten, wenn die Strahlung durch 2 oder 5 mm Al filtriert war. Es zeigt sich eine Konstanz der Quotienten $\mu_2 \text{ mm}/\mu_5 \text{ mm}$, wie zu erwarten war. Weiter zeigt der Vergleich der Absorptionskoeffizienten, daß sich das Gebiet der Absorptionsvermögen für die Extremwerte $76 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$ und $58,19 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$ bei der schwachen Filterwirkung auf ein nahezu halb so großes Intervall reduziert hat, wenn durch 5 mm Al filtriert wurde. Der Schwankungsraum der Absorptionskoeffizienten für verschiedene dichte Medien wird mit steigender Strahlendichte immer kleiner. Dasselbe zeigen die Massenabsorptionskoeffizienten μ/q . Hier beträgt z. B. der Schwankungsraum bei 2 mm Al 0,218, bei 5 mm Al nur noch 0,119. Er strebt offenbar dem Werte Null zu wie im Falle der γ -Strahlen, was dann gleichbedeutend ist mit der für die γ -Strahlen bereits bestätigten Erscheinung, daß das Absorptionsvermögen für unendlich kleine Impulsbreiten schließlich für alle Körper gleich wird. Diese Grenzerscheinung läßt sich

versuchsweise folgendermaßen erklären: Handelt es sich bei dem Absorptionsvorgange um Resonanzerscheinungen im Atom bzw. im Molekül, so daß die ankommenden Impulse gewisse Elektronen — in den meisten Fällen die relativ labilen, zu äußerst in der Atomsphäre gelegenen Valenzelektronen — in Schwingungen versetzen, wobei ein Teil der Strahlungsenergie verzehrt wird, so könnte man sich vorstellen, daß mit steigender Frequenz der Strahlung die Elektronen, die trotz ihrer Kleinheit mit gewisser Trägheit zu begaben sind, nicht mehr genügend ansprechen.

§ 9. Abhängigkeit des Absorptionsvermögens von der Spannungsvariation der Röhre.

Die spektrale Zusammensetzung des Röntgenlichtes hängt allein ab von dem Spannungsverlaufe an der Röhre. Wird die Röhrenspannung gesteigert, etwa durch größere Belastung des Primärstromes, dann erhöht sich die Elektronengeschwindigkeit, die emittierte Strahlung wird kurzwelliger und das Absorptionsvermögen wird kleiner. Es wird nun im folgenden untersucht, in wieweit eine Änderung der Röhrenspannung die Größe des Absorptionskoeffizienten beeinträchtigt. Während bei vier Meßreihen die primäre Stromstärke 2,85 A betrug, wurde sie in zwei Fällen gesteigert auf 3,2 A. Diese geringe Stromsteigerung bewirkte eine erhebliche Spannungserhöhung. Zeigte der Härtemesser in dem ersten Falle bei 2 M. A. etwa 7 Benoist, so zeigte er jetzt bei 2 M. A. gut 9—10 Benoist. Im ersten Falle entlud sich das Elektroskop bei 2 M. A. in etwa 28 Sekunden, im zweiten Falle in ca. 8 Sekunden, also dem dritten Teile der Zeit. Diese Verhältnisse ließen einen erheblichen Unterschied in der Größe des Absorptionskoeffizienten für die beiden Belastungen erwarten. Dem war aber nicht so. Berechnete sich im ersten Falle der Absorptionskoeffizient aus vier Messungen zu $30 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$, so bestimmte er sich bei der höheren Belastung auf Grund der Messungen zu $24,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$. Tab. 8 enthält die Absorptionskoeffizienten, die primären Stromstärken und die Entladungszeiten in Sekunden bei einer sekundären Stromstärke von 2 M. A. Ein Einfluß ist ersichtlich, aber er ist gegen Erwarten klein. Trotzdem betrug die mittlere Härte für die beiden letzten Versuche 2—3 Einheiten mehr.

Tabelle 8.

Entladungszeit in Sek.	Primärer Strom	Abs.-Koeff. cm^{-1}
22 Sek.	2,87 A.	$30,14 \cdot 10^{-4}$
23 "	2,82 "	32,60
22,2 "	2,83 "	28,34
22,7 "	2,85 "	30,17
8,8 "	3,2 "	25,80
7 "	3,25 "	24,67

Man kann sich die Erscheinung folgendermaßen erklären: Wenn auch infolge der höheren Belastung die Hauptstrahlung wesentlich härter wird (etwa die vom Brennfleck ausgehende Platinfluoreszenzstrahlung), so tritt daneben ein intensives Gemisch von weicheren Strahlen auf, dessen Ursprung man vielleicht in den peripherischen Gegenden des Brennfleckes suchen wird. Während die sehr harte Strahlung nur sehr wenig von den leichten gasförmigen Medien absorbiert wird, erfährt das weichere Strahlengemisch hier eine starke Absorption. Für sie wird eigentlich das Absorptionsvermögen bestimmt, nicht etwa für die kurzwellige Strahlung, welche auf dem Leuchtschirm die Härte 10 anzeigt. Deshalb kann man die Röhrenspannung um einige Kilovolt erhöhen, ohne daß der Absorptionskoeffizient wesentlich kleiner wird, es sei denn, daß die weiche Strahlung durch genügend dicke Filter abgefangen wird.

§ 10. Über den Wert der Angabe des Absorptionsvermögens einer Substanz für eine beliebige Strahlung durch den Absorptionskoeffizienten.

Aus der Variation der Absorptionsmessungen nach Strahlenhärte und Filtrierung an einer gegebenen Substanz geht hervor, daß bei der Angabe eines Absorptionskoeffizienten irgendeines Körpers eine Angabe der Bedingungen und näheren Verhältnisse, die der Messung zugrunde lagen, durchaus nötig ist. Die Angabe eines Absorptionskoeffizienten hat nur dann Wert und Bedeutung, wenn gleichzeitig die Strahlenhärte und Filterstärke bekannt sind. Durch ungenügende Beachtung dieser Forderung ist die Röntgenliteratur zurzeit noch reich an widersprechenden Absorptionsangaben. Wie oben ausgeführt

wurde, lassen sich überhaupt keine Absolutwerte des Absorptionsvermögens eines Körpers für Röntgenstrahlen feststellen, aber selbst der Relativwert der Angaben geht verloren ohne Charakterisation der Versuchsbedingungen. So bestimmten Rutherford und Clung¹⁾ den Massenabsorptionskoeffizienten von Luft μ/ρ zu $0,22 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$, Holtsmark²⁾ ermittelte 2 Jahre später einen mehr als doppelt so großen Wert zu $0,48 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$. Dem Leser bleibt es überlassen zu entscheiden, ob der geringere Wert $0,22 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ auf stärkere Filtrierung oder härtere Primärstrahlung zurückzuführen ist. Stimmte die erste Erklärung, dann wäre der Wert viel eher ein Absolutwert als im Falle der zweiten Deutung. Größeren Relativwert beanspruchen die Angaben von Winawer und Sachs³⁾, welche für eine weiche Strahlung ($\mu/\rho_{\text{Al}} = 0,6$) die folgenden Massenabsorptionskoeffizienten bestimmt haben:

$$\mu/\rho_{\text{ausge Luft}} = \mu/\rho_{\text{Wasser}} = 0,3 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}.$$

In wie beträchtlichem Maße die Filterwirkung für den Endwert ausschlaggebend ist, beweist eine weitere Messung von Winawer⁴⁾ aus dem Jahre 1914. Nachdem hier die Strahlung einer Veifa-Maximumsröhre durch 1 mm Blei filtriert war, ergab sich als Massenabsorptionskoeffizient von Wasser der Wert $\mu/\rho = 0,12$, während er in der späteren Arbeit ohne diese intensive Filterwirkung zu $0,3 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ ermittelt wurde.

§ 11. Vergleich des Absorptionskoeffizienten von Luft für Röntgenstrahlen und für γ -Strahlen.

Der Absorptionskoeffizient von γ -Strahlen für atmosphärische Luft wurde ziemlich gleichzeitig bestimmt von Heß⁵⁾ und Chadwick⁶⁾. Heß ermittelte einen etwas geringeren Wert als Chadwick. Die Ursache lag wahrscheinlich in der verschiedenen Versuchsanordnung. So fand

$$\begin{aligned} \text{Heß } \mu &= 4,47 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}, \\ \text{Chadwick } \mu &= 6,20 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}. \end{aligned}$$

1) E. Rutherford u. Mc. Clung, *l. c.*

2) G. Holtsmark, *Ann. d. Phys.* **10**, p. 522. 1903.

3) B. Winawer u. S. Sachs, *Phys. Zeitschr.* **16**, p. 261. 1915.

4) B. Winawer, *Phys. Zeitschr.* **15**, p. 946. 1914.

5) V. F. Heß, *Phys. Zeitschr.* **12**, p. 998. 1911.

6) J. Chadwick, *Proc. Phys. Soc.* **24**, p. 152. 1912.

Der Absorptionskoeffizient harter Röntgenstrahlen für Luft wurde bestimmt zu $6,0 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ für eine Strahlenhärte von 7—8 Benoist bei 2 mm Al-Filterwirkung (vgl. p. 300). Die so gehärtete Röntgenstrahlung ist aber noch keineswegs homogen, nur die weichen und mittelharten Komponenten sind hinwegfiltriert. Aus der Meßreihe für Chlormethyl (§ 6) geht nun hervor, daß bei ca. 9 mm Al-Filterwirkung die zur Absorption gelangende Strahlung praktisch homogen ist. Dann ist aber der Absorptionskoeffizient nur noch etwa halb so groß, er beträgt nach Interpolation aus der Kurve den 2,25. Teil. Berechnet man für diese stark filtrierte Strahlung aus der Kurve den Absorptionskoeffizienten von Luft, so erhält man als Wert $\mu = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$. Über das gegenseitige Absorptionsvermögen von Röntgen- und γ -Strahlen in Luft erhält man eine konkretere Vorstellung, wenn man etwa nach der **Halbwertschicht** von Luft fragt gegenüber den beiden Strahlentypen. Dabei versteht man unter der Halbwertschicht von Luft diejenige Luftsicht, welche die Strahlen durchsetzen müssen, um auf die Hälfte ihrer Anfangsintensität geschwächt zu werden. Diese Halbwertschicht bestimmt sich leicht auf Grund der Beziehung

$$\frac{1}{2} J_0 = J_0 \cdot e^{-\mu l}.$$

Setzt man die jeweiligen Absorptionskoeffizienten für X-Strahlen und γ -Strahlen in die obige Gleichung ein, so findet man als Halbwertschicht für X-Strahlen

$$l_x = \frac{\log 2 \cdot 10000 \cdot 2,80259}{2,6} \sim 27 \text{ m}.$$

Für die hochgeschwinden γ -Strahlen ergibt sich auf Grund derselben Rechnung unter Benutzung des von Heß ermittelten Absorptionskoeffizienten eine Halbwertschicht in Luft

$$l_\gamma = \frac{\log 2 \cdot 100000 \cdot 2,80259}{4,47} \sim 115 \text{ m},$$

die also 4—5mal größer ist als die der benutzten X-Strahlen.

§ 12. Das graphische Bild des Absorptionskoeffizienten.

In Fig. 5 sind als Abszissen die Rückgänge aufgetragen, welche in dem hinter dem Versuchsrohr aufgestellten Elektroskop beobachtet wurden, als Ordinaten diejenigen, welche in

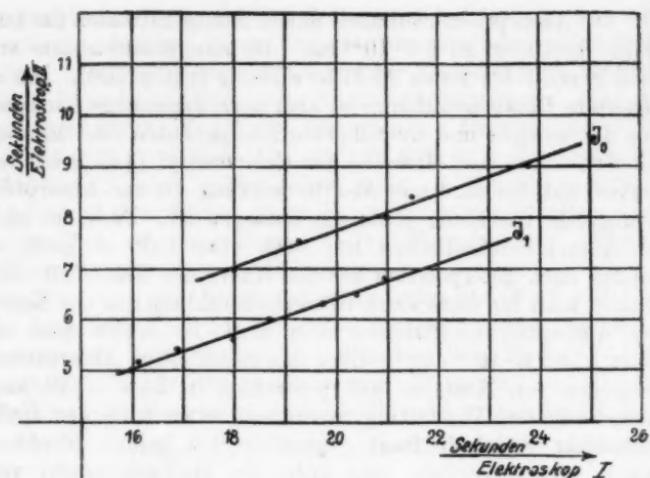


Fig. 5.

dem hinter dem Standardrohr aufgestellten Elektroskop bestimmt wurden.

Die obere Gerade ist die graphische Darstellung der unghemmten Strahlungsintensität J_0 bei Vakuum, die untere

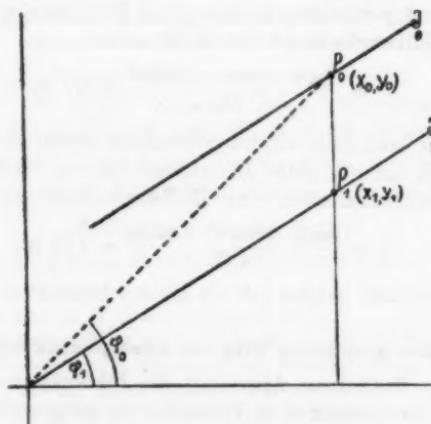


Fig. 6.

Gerade diejenige der geschwächten Strahlungsintensität J_1 bei Gasfüllung. Aus der linearen Beziehung der unter verschiedenen Azimuten in beiden Elektroskopen beobachteten Rückgänge und aus der Parallelität der beiden Geraden folgt, daß für mittlere Härten die Strahlungsverteilung unter verschiedenen Emissionswinkeln konstant ist. In Fig. 6 sind die Verhältnisse schematisch gezeichnet.

J_0 sei wieder das Bild der ungeschwächten Strahlung, J_1 das der geschwächten Strahlung. Dann ist

$$\frac{x_0}{y_0} = \text{const.} = c_0 \text{ proportional der ungeschwächten Strahlung}$$

und

$$\frac{x_1}{y_1} = \text{const.} = c_1 \text{ proportional der geschwächten Strahlung.}$$

Also ist $\frac{c_0}{c_1} = e^{-\mu l}$ und entsprechend auch

$$\frac{x_0 \cdot y_1}{y_0 \cdot x_1} = \frac{c_0}{c_1} = e^{-\mu l}.$$

Da im besonderen $x_0 = x_1$, so ist

$$\frac{y_1}{y_0} = e^{-\mu l}$$

oder

$$\mu = \frac{\log \text{nat } y_0 - \log \text{nat } y_1}{l}.$$

Statt der Ordinaten y_0 , y_1 kann man auch die Winkel einführen, welche die von den Aufpunkten P_0 , P_1 nach dem Ursprung gezogenen Geraden bilden. Da

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{\text{tg } \varphi_0} \quad \text{und} \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{\text{tg } \varphi_1},$$

so ist

$$\frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi_0} = e^{-\mu l},$$

oder

$$\mu = \frac{\log \text{nat } \text{tg } \varphi_0 - \log \text{nat } \text{tg } \varphi_1}{l}.$$

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

**3. Die Lichtstärke des schwarzen Körpers
in Hefnerkerzen und die Strahlungskonstanten der
Glühlampenkohle;¹⁾
von H. Kohn.**

§ 1. Seit der Aufstellung des Kirchhoffschen Gesetzes und im besonderen seit der Entwicklung der Gesetze der schwarzen Strahlung und ihrer experimentellen Verwirklichung hat man sich daran gewöhnt, die Strahlung beliebiger Substanzen ihrer Größe und Eigenschaften nach sozusagen an der des schwarzen Körpers zu orientieren. Im Einklang hiermit läge es nahe, auch die Flächenhelligkeit des schwarzen Körpers bestimmter Temperatur als Normale der Lichtstärke einzuführen und die Flächenhelligkeit und somit auch die gesamte Lichtstärke beliebiger Substanzen auf diese zu beziehen. Bekanntlich steigt aber die Flächenhelligkeit so schnell mit der Temperatur an, daß man diese bei einem Werte von ca. 2900° abs., wie ihn unsere gebräuchlichen Lichtquellen haben, auf ca. 2° genau ermitteln müßte, um die Helligkeit des schwarzen Körpers auf 1 Proz., d. h. mit der gleichen Genauigkeit zu reproduzieren, wie es der Reichsanstalt bei der Hefnerkerze möglich ist.²⁾ Bereits das Konstanthalten der Temperatur innerhalb dieser Grenzen würde Schwierigkeiten bieten, weit größere jedoch die Feststellung dieser Temperatur, wozu, nach Warburg, energetische Messungen von einer Genauigkeit von 0,1—0,2 Proz. erforderlich wären. Durch diese Schwierigkeit wird also die wichtigste Eigenschaft der Normalen, nämlich ihre Reproduzierbarkeit, in Frage gestellt, und man ist daher bis heute bei der auf die Helligkeit der Hefnerlampe begründeten Einheit der Hefnerkerze geblieben.

§ 2. Um nun aber die Flächenhelligkeit und Leistungsfähigkeit unserer gebräuchlichen Lichtquellen mit derjenigen

1) Vorgetragen in der Sitzung der Schles. Ges. für vaterl. Kultur am 13. Juli 1917.

2) Nach E. Warburg, Über eine rationelle Lichteinheit, Verh. d. D. Physik. Ges. 19. p. 3—10. 1917.

des schwarzen Körpers vergleichen und auf Grund der Gesetze der schwarzen Strahlung Aussagen über die Ziele und Grenzen der Leuchttechnik in der Einheit der Hefnerkerze machen zu können, bedarf es einer Eichung des schwarzen Körpers in Hefnerkerzen. Wenngleich diese auch dieselben Schwierigkeiten bietet wie die Einführung der Helligkeit des schwarzen Körpers als Normale, so brauchen wir von ihr für die genannten Zwecke doch nicht den hohen Grad der Genauigkeit wie von einer Normale zu fordern.

Diese Eichung ist zum ersten Male von Lummer und Pringsheim¹⁾ mit dem Lummer-Kurlbaumschen schwarzen Körper²⁾ ausgeführt worden; später hat sie Nernst³⁾ mit einem anderen schwarzen Körper bis zu höheren Temperaturen ausgedehnt. Seitdem findet sich in der Literatur nur bisweilen der Wunsch nach einer Wiederholung der Messungen ausgesprochen.

Die vorliegende Arbeit gibt eine Wiederholung der Messungen mit dem Lummer-Kurlbaumschen schwarzen Körper. Die Angabe der zu den gemessenen Lichtstärken gehörigen Temperaturwerte erfolgt auf Grund der verschiedenen Temperaturskalen, die sich je nach dem gewählten Werte der Strahlungskonstanten ergeben, um einen Vergleich mit früheren Messungen am schwarzen Körper und an anderen Lichtquellen bekannter Temperatur zu ermöglichen.

Der elektrisch geheizte Lummer-Kurlbaumsche schwarze Körper wurde mit dem Lummer-Brodhunschen Photometer gegen eine in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt auf horizontale Hefnerkerzen geeichte Kohlefadenlampe mit U-förmigem Bügel photometriert.⁴⁾ Vor dem schwarzen Körper war eine kleine kreisförmige Blende angebracht, deren Größe und Abstand von der Öffnung des schwarzen Körpers so gewählt waren, daß sie als die eigentliche strahlende schwarze Fläche angesehen werden kann. Sie war so justiert, daß die Spitze des durch ihren Rand und den Photometerschirm begrenzten Strahlenkegels im schwarzen Körper an den Ort

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Physik. Zeitschr. 3. p. 97—100. 1902.

2) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 5. p. 829. 1901.

3) W. Nernst, Physik. Zeitschr. 7. p. 380. 1906.

4) Diese Messungen habe ich zum Teil gemeinsam mit Hrn. cand. phil. F. Conrad ausgeführt.

der Lötstelle des Thermoelementes zu liegen kam. Die gemessene Lichtstärke ist die horizontale Lichtstärke einer ebenen schwarzen Kreisfläche von der Größe der Blende, senkrecht zu dieser beobachtet. Die mittlere sphärische Lichtstärke beträgt den vierten Teil der horizontalen, was sich ohne weiteres ergibt, wenn wir uns die von dieser Kreisfläche in den Halbraum ausgehende Lichtmenge gleichmäßig auf die Oberfläche einer Kugel vom gleichen Radius verteilt denken; auf die Einheit dieser Kugelfläche entfällt nur der vierte Teil derjenigen Lichtmenge, die auf die Einheit der ebenen Kreisfläche kommt.

Die Messungen wurden mit zwei Blenden verschiedener Größe ausgeführt und der Abstand zwischen Blenden und schwarzer Körperöffnung etwas variiert, um die Genauigkeit der oben angegebenen Justierung zu prüfen. Es ergaben sich dabei z. B. die folgenden Werte der Lichtstärke, wo mit *A* und *B* die mit zwei verschiedenen Blenden, mit *I* und *II* die in zwei um 15 cm verschiedenen Abständen vorgenommenen Messungen bezeichnet sind.

Tabelle 1.

Messung	Lichtstärke
<i>A</i> <i>II</i>	0,01974 HK/mm ²
<i>A</i> <i>II</i>	0,01972
<i>A</i> <i>I</i>	0,02005
<i>A</i> <i>I</i>	0,01974
<i>B</i> <i>II</i>	0,02008
<i>B</i> <i>I</i>	0,02027

Bei den einzelnen Helligkeitsmessungen, ebenso bei der Ausmessung der Blenden unter der Teilmaschine betragen die äußersten Abweichungen ca. 0,5 Proz.

Blende *A* hat einen Durchmesser von 5,149, Blende *B* von 10,068 mm.

§ 8. Das im schwarzen Körper befindliche Pt-PtRh-Thermoelement, durch welches die zu den Helligkeitsmessungen gehörigen Temperaturen des schwarzen Körpers angezeigt werden, ist ein in der Reichsanstalt auf Grund der Holborn-Daysehen¹⁾ Skala geeichtes. Bei dieser Eichung sind die

1) L. Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68. p. 817. 1899 und Ann. d. Phys. 2. p. 505. 1900.

Temperaturen bekanntlich nur bis zum Goldschmelzpunkte, 1064° C, auf gasthermometrische Messungen begründet; von da ab ist die Skala nach einer empirisch gewonnenen Formel extrapoliert. Die Werte dieser Skala stimmen nahezu mit denjenigen der strahlungstheoretischen Temperaturskala überein, die sich, an die monochromatische Intensität des schwarzen Körpers bei 1064° anknüpfend, bei Benutzung des Wertes $1,46 \text{ cm} \cdot \text{grad}^1$) für die Konstante c_2 der Wienschen Spektralgleichung ergibt. Immerhin beträgt gemäß den Messungen von Warburg, Leithäuser, Hupka und Müller²⁾ am Palladiumschmelzpunkt, der sich nach gasthermometrischen Messungen zu $1549,2^{\circ}$ ³⁾ ergibt, der Unterschied dieser beiden Skalen ca. 5 Grad. Wir machen die Annahme, daß der Unterschied der beiden Skalen der Temperaturdifferenz proportional ist und erhalten so, durch Inter- und Extrapolation die Korrektionen, die an den auf der Eich-tabelle angegebenen Temperaturen für das Intervall zwischen 1064 und 1549° und für höhere Temperaturen anzubringen sind. Der bei der Interpolation gemachte Fehler dürfte jedenfalls sehr gering sein. Der Übergang von der auf den Wert $c_2 = 1,46$ aufgebauten Temperaturskala zu den auf anderen gemessenen Werten der Konstanten beruhenden ergibt sich auf Grund der Wienschen Spektralgleichung.

Ist T_1 die Ausgangstemperatur, T_2 die nach der Wienschen Gleichung aus dem Intensitätsanstieg zu berechnende höhere Temperatur, so ist

$$dT_2 = - \frac{T_2(T_2 - T_1)}{T_1} \frac{dc_2}{c_1}.$$

In Tab. 2 sind die auf Grund verschiedener gemessener Werte der Strahlungskonstanten c_2 in dieser Weise berechneten Temperaturskalen angegeben.

Nach der auf den Wert $c_2 = 1,437$ aufbauenden Skala stimmt der Palladiumschmelzpunkt mit dem durch gasthermo-

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verh. d. D. Physik. Ges. 3. p. 36—46. 1901.

2) E. Warburg, G. Leithäuser, E. Hupka u. C. Müller, Ber. d. Berl. Akad. II, 35—43. 1913; vgl. auch Ann. d. Phys. 1913.

3) A. Day u. R. Sossmann, Sill. Journ. (4) 29. p. 93. 1910; vgl. auch „La mesure des températures élevées par le thermomètre à gaz“, Journ. de Phys. (5) 2. 727—749, 831—844, 899—911. 1912.

Tabelle 2.

Temperatur nach Holborn u. Day	Temperatur entsprechend $c_2 =$			
	1,460	1,450	1,440	1,437
1400 absolut.	1401	1401,5	1401,9	1402,6
1500	1502	1503,2	1504,5	1504,9
1600	1603	1605,2	1607,4	1608,0
1700	1704	1707,2	1710,4	1711,4
1800	1805	1809,3	1813,7	1815,0
1900	1906	1911,5	1917,1	1918,8
2000	2007	2013,9	2020,8	2022,9
2100	2108	2116,4	2124,8	2127,3
2200	2209	2218,9	2228,8	2232,0
2300	2310	2321,5	2333,0	2336,5
2400	2411	2424,3	2437,6	2441,6
2500	2512	2527,2	2542,4	2547,0
2600	2613	2630,1	2647,2	2652,3
2700	2714	2733,2	2752,4	2758,2

metrische Messungen erhaltenen gemäß Warburg usw.¹⁾ auf 1,4° überein.

Die gemessenen Werte der horizontalen und mittleren sphärischen Lichtstärke (HK_0) des schwarzen Körpers sind in der folgenden Tabelle den auf Grund dieser verschiedenen Skalen erhaltenen Temperaturwerten zugeordnet.

Tabelle 3.

Absolute Temperatur für c_2				Lichtstärke in $HK_{hor.}$ cm^2	
= 1,460	= 1,450	= 1,440	= 1,437	$HK_{hor.}$ cm^2	HK_0 cm^2
1295	1295	1295	1295	0,06	0,015
1586	1588	1590	1591	2,00	0,500
1731	1735	1738	1739	7,71	1,928

Diese Werte sind nach den oben gemachten Angaben auf ± 1 Proz. genau. Etwaige Temperaturschwankungen während der Helligkeitsmessungen sind hierin inbegriffen. Die Absolutwerte hängen noch von der Genauigkeit der Eichung des Thermoelementes und der Vergleichsglühlampe ab.

1) l. c. p. 323.

§ 4. Von diesen gemessenen Werten der Lichtstärke H_1 bei der Temperatur T_1 ausgehend, soll die Lichtstärke H_2 bei der Temperatur $T_2 = 2000^\circ$ abs. berechnet werden, um einen Vergleich mit den von Lummer und Pringsheim gemessenen Werten vornehmen zu können.

Dies kann nach der Lummer-Kurlbaumschen Potenzgleichung¹⁾

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^x,$$

oder einfacher nach einem auf die Raschsche Gleichung²⁾

$$\lg \left(\frac{H_2}{H_1} \right) = x \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \lg e$$

begündeten Extrapolationsverfahren geschehen. Die Raschsche Gleichung ergibt sich aus der Potenzgleichung, wenn

$$x = x \cdot T$$

gesetzt wird.

Der Wert von x zeigt sowohl nach verschiedenen Messungen des Anstieges der Helligkeit mit der Temperatur wie nach den Berechnungen derselben eine geringe Abhängigkeit von der Temperatur.³⁾ Innerhalb eines begrenzten Temperaturintervales kann man jedoch mit genügender Genauigkeit einen konstanten Wert von x benutzen. Aus den von Lummer und Kohn³⁾ berechneten Werten der Helligkeit des schwarzen Körpers (in relativem Maße) ergibt die Rechnung für x den Wert 24860 zwischen 1500° und 2000° . Der Berechnung der hier benutzten Helligkeitswerte liegt der Wert 1,45 der Konstante c_2 zugrunde. Setzt man in der Raschschen Gleichung

$$x = c_2/\lambda,$$

so stimmt sie mit der Wienschen Gleichung in logarithmischer Form

$$\lg \left(\frac{H_2}{H_1} \right) = \frac{c_2}{\lambda} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \lg e$$

überein. Dies besagt⁴⁾, daß der Anstieg der Gesamthelligkeiten

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verh. d. D. Physik. Ges. 2. p. 89—92. 1900.

2) E. Rasch, Ann. d. Phys. 14. p. 193—203. 1904.

3) O. Lummer u. H. Kohn, Jahresber. d. Schles. Gesellsch. für vaterl. Kultur 1915. M. Pirani u. H. Miethling, Verh. d. D. Physik. Gesellsch. 17. p. 219. 1915.

4) M. Pirani u. H. Miethling, l. e.

in einem begrenzten Temperaturintervall, in welchem α konstant zu nehmen ist, der gleiche ist wie der der monochromatischen Intensitäten für eine gewisse Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c_2}{\alpha}.$$

Beim Übergang zu einem anderen c_2 -Wert und somit zu einer anderen Temperaturskala, wird sich also der Wert von α und der Wert des Verhältnisses $\lg \left(\frac{H_2}{H_1} \right)$ in gleicher Weise wie c_2 selbst ändern. Mit den gemäß dieser Überlegung für die verschiedenen Temperaturskalen berechneten Werten für α sind die in Tab. 4 angegebenen horizontalen und mittleren sphärischen Lichtstärken des schwarzen Körpers bei 2000°

Tabelle 4.
Lichtstärke des schwarzen Körpers bei 2000° abs.

Temperaturskala entsprechend $c_2 =$							
1,460	1,450		1,440		1,437		
Ausgangs-temperatur	HK hor. cm ²	Ausgangs-temp.	HK hor. cm ²	Ausgangs-temp.	HK hor. cm ²	Ausgangs-temp.	HK hor. cm ²
1586	52,3	1588	50,3	1590	48,3	1591	47,5
1731	53,8	1735	51,8	1738	49,6	1739	49,0
Mittelwert:	53,05		51,05		48,95		48,25
	HK ₀ cm ²		HK ₀ cm ²		HK ₀ cm ²		HK ₀ cm ²
	13,26		12,76		12,24		12,06

Tabelle 5.
(Nach Lummer - Pringsheim.)

Temperaturskala entsprechend $c_2 =$							
1,460	1,450		1,440		1,437		
Ausgangs-temperatur	HK hor. cm ²	Ausgangs-temp.	HK hor. cm ²	Ausgangs-temp.	HK hor. cm ²	Ausgangs-temp.	HK hor. cm ²
1449	48,7	1450	46,9	1451	44,8	1452	43,9
1603	48,6	1605	46,9	1607	45,0	1608	44,3
1712	52,0	1715	50,1	1718	47,9	1719	47,3
Mittelwert:	49,77		47,97		45,87		45,17
	HK ₀ cm ²		HK ₀ cm ²		HK ₀ cm ²		HK ₀ cm ²
	12,44		11,99		11,47		11,29

gewonnen. In Tab. 5 sind zum Vergleich die in genau derselben Weise auf Grund der Lummer-Pringsheimschen Messungen¹⁾ extrapolierten Lichtstärken des schwarzen Körpers bei 2000° angeführt.

Der tiefste gemessene Helligkeitswert bei 1295° (vgl. Tab. 3) ist hier nicht als Ausgangspunkt herangezogen, da bei ihm infolge der geringen Lichtstärke die Meßgenauigkeit geringer als bei den beiden anderen Punkten war.

Zwischen den neugemessenen Werten und denen von Lummer und Pringsheim besteht eine relativ gute Übereinstimmung.

§ 5. Mit Hilfe der neugewonnenen Daten wurde für den Vergleich der Leistungsfähigkeit unserer gebräuchlichen Lichtquellen mit derjenigen des schwarzen Körpers, im besonderen gleicher Temperatur, die mittlere räumliche Hefnerkerzenzahl berechnet, die bei der Temperatur von 2000° abs. auf ein Watt gesamter *ausgestrahlter* Energie entfällt. Diese Größe ist identisch mit der „technischen Ökonomie“

$$= \frac{\text{Lichtstärke}}{\text{zugeführte Energie}} \text{ 2)}$$

derjenigen Lichtquellen, bei welchen alle *zugeführte* in *ausgestrahlte* Energie umgewandelt wird, wie z. B. mit großer Annäherung bei den Kohlefadenglühlampen (vgl. p. 332).

Die Wahl des Wertes für die Konstante σ im Stefan-Boltzmannschen Gesetze, nach welchem wir die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers zu berechnen haben, wird in gewissem Sinne durch die einmal zugrunde gelegte Temperaturskala, d. h. durch den für die Konstante c_2 gewählten Wert vorgeschrieben.

Nach dem Stefan-Boltzmannschen und dem Planck-schen Gesetze ist das Konstantenpaar c_2 und σ durch die Gleichungen

$$c_2 = c \cdot \frac{h}{k},$$

$$\sigma = \frac{12\pi\alpha}{c^2} \frac{k^4}{h^3}$$

gegeben. Es besteht also eine gewisse Abhängigkeit zwischen c_2 und σ , welche durch die gemeinsame Abhängigkeit von

1) l. e. p. 321.

2) O. Lummer u. H. Kohn, l. e. p. 325.

dem universellen Konstantenpaar h und k hervorgerufen ist, (h ist das Plancksche Wirkungsquantum, k die für die kinetische Energie der Moleküle charakteristische Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit; a hat den Zahlenwert 1,0823.) Auf Grund dieser Abhängigkeit können wir also das eine Konstantenpaar aus den experimentell ermittelten Werten des anderen berechnen. Die experimentelle Bestimmung von h und k erfolgt z. B. durch Messung des photoelektrischen Effektes und des Elementarquantums e der Elektrizität. Nach den neuesten Messungen von Millikan¹⁾ beträgt $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einh., übereinstimmend mit dem Mittelwerte aus einer Anzahl neuerer Messungen, die untereinander im übrigen jedenfalls besser als die verschiedenen gemessenen Werte von σ übereinstimmen²⁾, woraus sich die Werte

$$h = 6,58 \cdot 10^{-27} \text{ (erg.sec)} \text{ und}$$

$$k = 1,368 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad}$$

ergeben.

Mit Hilfe dieser Werte folgen nach den obigen Gleichungen für die Strahlungskonstanten die Werte

$$\sigma = 5,60 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4} \text{ und}$$

$$c_2 = 1,4440 \text{ cm} \cdot \text{grad}$$

Diese voneinander abhängigen Werte stehen jedenfalls in gutem Einklang mit den experimentell nach völlig voneinander unabhängigen Methoden gewonnenen Werten von σ und c_2 , z. B. mit den Mittelwerten aus allen neueren Messungen derselben.

$$\sigma = 5,76 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} \text{ und}$$

$$c_2 = 1,4400 \text{ cm} \cdot \text{grad}$$

In dem Bestreben, die Zahl der physikalischen Konstanten möglichst zu verringern, ist es jedenfalls zweckmäßig, mit diesen Werten zu rechnen.

Wollen wir jedoch direkt experimentell gewonnene Werte von σ und c_2 benutzen, so dürfen wir jedenfalls wegen der gemeinschaftlichen Abhängigkeit der Konstanten vom Elementarquantum e nicht beliebige Werte kombinieren. Aus

1) R. A. Millikan, Phys. Review 7. p. 18. 1916.

2) Vgl. z. B. R. Pohl, Zeitschr. d. Radioakt. u. Elektr. 8. p. 406. 1911.

Tabelle 6.

Beobachter von σ	$\sigma \cdot 10^{12}$ Watt $\text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4$	c_0 nach	1,420		1,435		1,437		1,440		1,450		1,460	
			$e \cdot 10^{10}$	$h \cdot 10^{27}$										
Bauer, Moulin ¹⁾ 1909	5,30		4,34	5,89	4,48	6,14	4,51	6,18	4,53	6,23	4,62	6,40	4,72	6,58
Kurlbaum ²⁾ . . . 1898	5,32		4,45	6,03	4,59	6,29	4,61	6,33	4,64	6,38	4,73	6,56	4,83	6,74
Kurlbaum . . . 1912	5,45		4,55	6,18	4,70	6,44	4,72	6,48	4,75	6,53	4,85	6,72	4,95	6,90
Westphal ³⁾ . . . 1912	5,54		4,55	6,18	4,70	6,44	4,72	6,48	4,75	6,53	4,85	6,72	4,95	6,90
Valentiner ⁴⁾ . . . 1910	5,58		4,77	6,48	4,92	6,76	4,95	6,79	4,98	6,85	5,08	7,04	5,19	7,24
Shakespear ⁵⁾ . . . 1911	5,67		4,77	6,48	4,92	6,76	4,95	6,79	4,98	6,85	5,08	7,04	5,19	7,24
Gerlach ⁶⁾ . . . 1916	5,85		5,13	6,98	5,30	7,28	5,33	7,32	5,36	7,38	5,47	7,58	5,59	7,80
Féry ⁷⁾ 1909	6,30		6,51											
Féry u. Dreesq ⁸⁾ 1911														

- 1) E. Bauer u. M. Moulin, Journ. d. Phys. **9**, p. 468. 1910.
- 2) F. Kuribaum, Wied. Ann. **65**, p. 746. 1898 und Verh. d. D. Physik. Ges. **14**, p. 576. 1912.
- 3) W. H. Westphal, Verh. d. D. Physik. Ges. **14**, p. 987. 1912.
- 4) S. Valentiner, Ann. d. Phys. **31**, p. 275. 1910.
- 5) G. A. Shakespeare, Proc. Roy. Soc. **86**, A, p. 180. 1911.
- 6) W. Gerlach, Ann. d. Phys. **40**, p. 259. 1916.
- 7) Ch. Féry, Bull. Soc. Trans. Phys. (2) **4**, 1900.
- 8) Ch. Féry u. M. Dreesq, Journ. d. Phys. (1) **5**, p. 551. 1911.
- 9) L. Holborn u. S. Valentiner, Ann. d. Phys. **22**, p. 1. 1907.
- 10) E. Warburg, G. Leithäuser, E. Hupka u. C. Müller, Ber. d. Berl. Akad. II, p. 36—43. 1913; vgl. auch Ann. d. Phys. 1913.
- 11) F. Paschen, Ber. d. Berl. Akad. p. 405—959. 1899.
- 12) H. Wanner, Ann. d. Phys. **2**, p. 141. 1900.
- 13) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verh. d. D. Physik. Ges. **3**, p. 36—46. 1901.

Tab. 6 ist zu ersehen, zu welchen Werten von e und h die Kombination je zweier gemessenen Werte von σ und c_2 gemäß den Gleichungen p. 327 u. 328 führt. Durch doppeltes Unterstreichen sind diejenigen Kombinationen gekennzeichnet, aus denen sich e - und h -Werte ergeben, die fast vollkommen mit den gemessenen Werten dieser Konstanten übereinstimmen. Durch einfaches Unterstreichen sind die noch einigermaßen mit dem Experiment in Einklang stehenden Werte hervorgehoben.¹⁾

Unter Benutzung der in Tab. 8 gegebenen Lichtstärken und der nach Tab. 6 zu den verschiedenen c_2 -Werten gehörigen σ -Werte, erhält man somit für die Hefnerkerzenzahl pro Watt des schwarzen Körpers bei 2000° die folgenden Werte (Tab. 7), welche ganz erheblich von einander abweichen und viele Unstimmigkeiten in der Literatur erklären.

Tabelle 7.

c_2	$\sigma \cdot 10^{12}$ Watt cm^{-2}	HK_0 Watt
1,460	5,32	0,156
1,450	5,40	0,148
1,440	5,60	0,137
1,437	5,67	0,133

§ 6. Es soll ferner mit Hilfe der neugewonnenen Werte der Lichtstärke des schwarzen Körpers die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze der Glühlampenkohle und ihr Absorptionsvermögen ermittelt werden; im besonderen interessiert hierbei die sogenannte unpräparierte Kohle, für welche keine direkten Bestimmungen der genannten Konstanten vorliegen.

Nach den Untersuchungen von Lummer¹⁾, die sich ihrer Methode nach auf das sichtbare Spektrum und auf das kurzwellige ultrarote Gebiet ca. bis 5μ erstrecken und sich über das Temperaturintervall von ca. 1300 — 2500° abs. ausdehnen, strahlt die Glühlampenkohle innerhalb dieser Grenzen wie ein grauer Körper; d. h. ihr Absorptionsvermögen A_1 ist unabhängig von der Wellenlänge = A , ihr Emissionsvermögen

1) Vgl. a. S. Valentin, Ann. d. Phys. 31. p. 275. 1912.

2) O. Lummer, Jahresber. d. Schles. Gesellsch. f. vaterländ. Kultur 1913 und „Verflüssigung der Kohle und Herstellung der SonnenTemperatur“, Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1914.

zeigt den gleichen Verlauf wie beim schwarzen Körper gleicher Temperatur; ihr Gesamtstrahlungsgesetz ist, abgesehen vom Zahlenwert der Konstante, das gleiche wie beim schwarzen Körper. Die Lummerschen Untersuchungen, im besonderen auch die daran anschließenden von E. Benedict¹⁾, bringen ihrer Methode nach auch den Beweis, daß in dem betrachteten Temperaturintervall das Absorptionsvermögen unabhängig von der Temperatur ist.²⁾ Die genannten Resultate sind an sogenannter präparierter Kohle gewonnen; es werde die Annahme gemacht, daß sie auch für die unpräparierte Kohle Geltung haben.

Es seien $S_\lambda d\lambda$, S , σ das Emissionsvermögen, die Gesamtstrahlung und die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze des schwarzen Körpers, $E_\lambda d\lambda$, E und μ die entsprechenden Größen für die Kohle; dann folgt auf Grund des Kirchhoffschen Gesetzes:

$$E = \mu T^4 = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = A \int_0^\infty S_\lambda d\lambda = A \sigma T^4 = A S,$$

$$E = A \cdot S,$$

$$\mu = A \cdot \sigma.$$

In gleicher Weise folgt für die Beziehung der Gesamthelligkeiten H_S und H_E des schwarzen und grauen Körpers:

$$H_E = \int_{\text{1 viol.}}^{\text{1 rot.}} \varepsilon_\lambda E_\lambda d\lambda = A \int_{\text{1 viol.}}^{\text{1 rot.}} \varepsilon_\lambda S_\lambda d\lambda = A \cdot H_S,$$

$$H_E = A \cdot H_S;$$

hier bedeutet ε_λ die Helligkeitsempfindlichkeit der Netzhautzapfen. Das Integral wird über das sichtbare Spektralgebiet erstreckt. Daß das Auge die monochromatischen Helligkeiten $\varepsilon_\lambda S_\lambda d\lambda$ zu der Gesamthelligkeit integriert, hat die Übereinstimmung zwischen gemessenen und auf die angegebene Weise berechneten Helligkeitswerten ergeben.³⁾

Bei einundderselben Temperatur ist also das Verhältnis der Gesamthelligkeit zur Gesamtstrahlung oder in besonderen Einheiten die HK₀-Zahl pro 1 Watt ausgestrahlter Energie

1) E. Benedict, Dissert. Breslau 1915; vgl. auch Ann. d. Phys. 47, p. 641. 1915.

2) Vgl. auch E. P. Hyde, Astrophys. Journ. 36, p. 89. 1912.

3) O. Lummer u. H. Kohn, I. e. p. 325.

für den schwarzen Körper die gleiche wie für den grauen Strahler, und andererseits folgt aus dem Verhältnis der Hefnerkerzenzahl oder auch der Gesamtstrahlung (pro Flächeneinheit) beider Strahler bei gleicher $\frac{HK_0}{Watt}$ -Zahl (d. h. gleicher Temperatur) unmittelbar, ohne Kenntnis der Temperatur das Absorptionsvermögen und die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze des grauen Körpers.

Nach verschiedenen Untersuchungen¹⁾ wird bei den Kohlefadenglühlampen mit U-förmigem Bügel die zugeführte Energie mindesens bis auf 2 Proz. in ausgestrahlte übergeführt, so daß wir die *ausgestrahlte* Energie durch die *zugeführte* ersetzen können und die für die Bestimmung der Konstanten benötigte $\frac{HK_0}{Watt}$ -Zahl einfach durch Messung der mittleren sphärischen Lichtstärke in HK_0 und der zugeführten Watts erhalten. Um den Vergleich mit dem für den schwarzen Körper erhaltenen Wert vornehmen zu können, ist noch eine Erhöhung der gemessenen HK_0 -Zahl um 9 Proz. infolge des Verlustes durch Reflexion an der Glasglocke der Lampe anzubringen, außerdem die Fadenoberfläche zu bestimmen, um die Lichtstärke pro Flächeneinheit zu ermitteln.

Bei 1735° abs., d. h. $0,0394 \frac{HK_0}{Watt}$ hat der schwarze Körper gemäß Tab. 3 eine mittlere sphärische Lichtstärke von

$$1,928 \frac{HK_0}{cm^2},$$

die Messungen an einem sogenannten unpräparierten Faden ergaben

$$1,49 \frac{HK_0}{cm^2} (\text{red.}),$$

die an einem präparierten Faden

$$1,01 \frac{HK_0}{cm^2} (\text{red.}).$$

Demnach ergibt sich das Absorptionsvermögen der unpräparierten Kohle zu

$$A_0 = 0,773,$$

das der präparierten zu $A_1 = 0,524$.

¹⁾ E. P. Hyde, Cady, Worthing, Transactions III. Eng. Soc. 6. p. 238. 1911, im besondern auch nach einer im Druck befindlichen Dissertation von Hrn. cand. phil. F. Conrad.

Hieraus ergeben sich für die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze die Werte $\mu_0 = 1,084 \cdot 10^{-12} \text{ g-Cal/cm}^2 \text{ sec. grad}^4$
 $\mu_1 = 0,701$ „

Die Lummerschen direkten Messungen der Kohlekonstanten μ_1 für präparierte Kohle durch Vergleich mit einem (präparierten) Kohlekasten¹⁾ haben den Wert $\mu_1 = 0,725$ ergeben, welchem der Wert $A_1 = 0,548$ entspricht. Die Abweichungen von ca. 4 Proz. können natürlich aus der verschiedenen Art der Bestimmung hervorgehen; im besonderen kann der Wert der Fadenoberfläche, welcher bei der indirekten Methode direkt eingeht, nur auf ca. 2 Proz. genau ermittelt werden. Wahrscheinlich ist aber auch, daß die Strahlungseigenschaften der Präparierung zufolge von Lampe zu Lampe etwas verschieden sind.

Auf Grund der gleichen Betrachtungen können wir die Werte für die Konstanten der unpräparierten Kohle auch aus den von Lummer direkt für die präparierte Kohle gefundenen Werten ermitteln. Für beide Lampentypen wurden für verschiedene Glühzustände, d. h. $\frac{\text{Watt}}{\text{HK hor.}}$ -Werte die $\frac{\text{HK}_{\text{hor.}}}{\text{cm}^2}$ ermittelt. Das hiernach berechnete Helligkeitsverhältnis H_0/H_1 beider Fäden bei gleicher $\frac{\text{Watt}}{\text{HK hor.}}$ -Zahl ist in der vierten Vertikalspalte der Tab. 8 eingetragen, im übrigen auch aus Fig. 1 zu entnehmen.

Tabelle 8.

Watt pro HK hor.	$\frac{\text{HK}_{\text{hor.}}}{\text{cm}^2}$	$\frac{\text{HK}_{\text{hor.}}}{\text{cm}^2}$	$\frac{H_0}{H_1}$
300	0,050	0,034	1,470
200	0,084	0,058	1,458
100	0,220	0,150	1,467
80	0,290	0,200	1,460
60	0,423	0,285	1,484
40	0,755	0,510	1,480
30	1,13	0,770	1,467
25	1,45	0,990	1,465
20	1,92	1,31	1,466
15	2,90	1,99	1,457
10	5,30	3,60	1,472
7,5	7,98	5,58	1,451
5,0	14,55	10,00	1,455
4,0	20,30	14,00	1,460
3,0	32,30	22,00	1,455

Mittel: 1,463

1) O. Lummer, l. c. p. 330.

Das Verhältnis H_0/H_1 ist in einem weiten Intervall (Temperaturgebiet) konstant, woraus folgt, daß wenn eine Änderung des Absorptionsvermögens oder auch der Umsetzung der zugeführten in ausgestrahlte Watts mit der Temperatur von liegen sollte, diese Änderung jedenfalls für beide Fadentypen die gleiche ist.

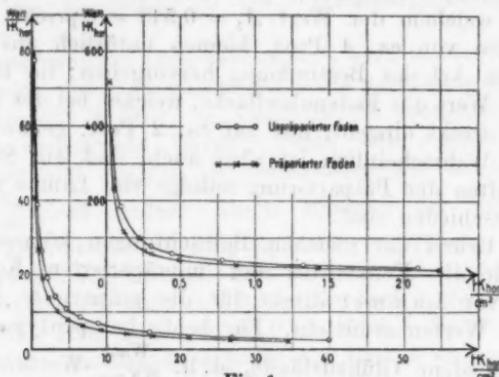


Fig. 1.

Aus dem Mittelwerte $H_0/H_1 = 1.463$ und den Konstanten für die präparierte Kohle nach Lummer ergeben sich für die unpräparierte Kohle die Werte $A_0 = 0.793$;

$$\mu_0 = 1.060 \cdot 10^{-12} \frac{\text{g-Cal}}{\text{cm}^2 \text{sec. grad}^4}.$$

In Tab. 9 werden die verschiedenen Werte der Konstanten noch einmal zusammengestellt.¹⁾

Tabelle 9.

	A_1	A_0	$\frac{\mu_1 \cdot 10^{12}}{\text{g-Cal}} \text{ cm}^2 \text{sec. grad}^4$	$\frac{\mu_0 \cdot 10^{12}}{\text{g-Cal}} \text{ cm}^2 \text{sec. grad}^4$
Direkte Messung	0,548			0,725
durch Beziehung auf die präparierte Kohle . .		0,793		1,060
durch Beziehung auf den schwarzen Körper . .	0,524	0,773	0,700	1,034

1) Diese Werte stehen in Einklang mit den von H. Senftleben und E. Benedict in einer im Druck befindlichen Arbeit erhaltenen Resultaten (Ann. d. Phys. 1917).

Aus den Watts, welche bei den in der Tab. 8 zugrundeliegenden Messungen den Lampen zugeführt wurden, sind nach der von Lummer angegebenen Methode¹⁾ unter Benutzung der mit Beziehung auf den schwarzen Körper gefundenen Konstanten μ_0 und μ_1 die zugehörigen Fadentemperaturen berechnet worden. Die Resultate sind in den Tab. 10 und 11 vermerkt.

Tabelle 10.

Präparierter Kohlefaden

Watt HK hor.	Absol. Temperatur
517,6	1307°
233,4	1399
117,3	1474
64,94	1546
57,82	1562
40,74	1617
26,87	1680
18,92	1741
13,74	1801
10,40	1862
8,16	1918
6,44	1971
5,23	2023
4,25	2071
3,69	2124
3,09	2172
2,67	2220
2,27	2270

Tabelle 11.

Unpräparierter Kohlefaden

Watt HK hor.	Absol. Temperatur
909,1	1250°
387,3	1357
184,4	1430
98,37	1500
77,48	1526
58,47	1566
38,96	1628
26,46	1687
19,01	1743
14,18	1798
10,90	1850
8,68	1901
6,98	1947
4,73	2040
3,31	2128
2,64	2215

Die $\frac{\text{Watt}}{\text{HK hor.}}$ -Werte als Funktion der Temperatur sind in Fig. 2 dargestellt. Wie es die zugrundegelegten Betrachtungen verlangen, ergibt sich für beide Fadentypen innerhalb der Fehlergrenzen eine einheitliche $\frac{\text{Watt}}{\text{HK hor.}}$ -Temperaturkurve.²⁾

1) O. Lummer, l. c. p. 330.

2) Diese Kurve stimmt mit der in der Lummerschen Broschüre l. c. p. 330) gegebenen gut überein, obwohl jene auf Grund des Wertes $\mu_1 = 0,725$, diese mit $\mu_1 = 0,701$ gewonnen ist; es scheint also in der Tat zwischen der Präparierung der beiden Fäden (vgl. die Bemerkung p. 333) ein kleiner Unterschied bestanden zu haben. Sehr stark weichen beide Kurven von einer von Lummer und Kohn (Sitzungsber. d. Schles. Gesellsch. f. vaterländ. Kultur 1915) gegebenen ab, worauf ich zuerst

Zusammenfassung: Die Lichtstärke des schwarzen Körpers in $\frac{HK_e}{cm^2}$ wird bei verschiedenen Temperaturen gemessen, wobei die Temperaturwerte in den verschiedenen strahlungstheoretischen Temperaturskalen angegeben werden. Aus der

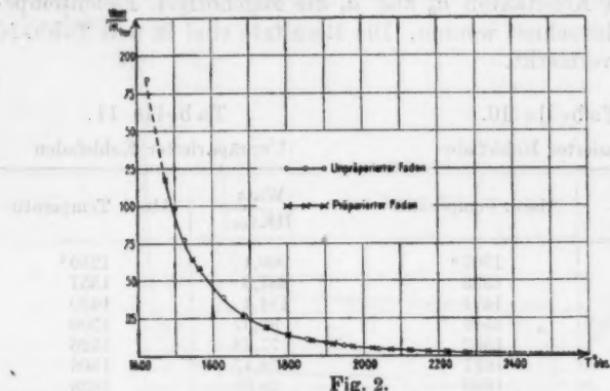


Fig. 2.

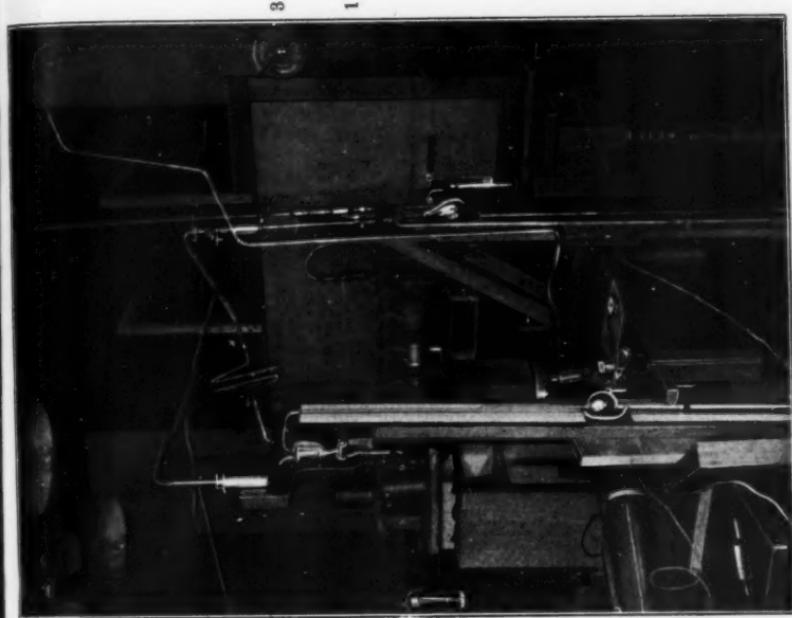
Beziehung zwischen Flächenhelligkeit und Temperatur wird hiernach die Lichtstärke bei 2000° abs. extrapoliert. Auf Grund dieses Wertes wird, als Bezugswert, die $\frac{HK_e}{Watt}$ -Zahl des schwarzen Körpers bei 2000° abs. berechnet, wobei Tabellen für die in den verschiedenen Temperaturskalen zusammengehörigen Werte der Strahlungskonstanten gegeben werden. Schließlich werden unter Benutzung der gemessenen Lichtstärke und Ökonomie des schwarzen Körpers die Strahlungskonstanten der Glühlampenkohle ermittelt.

Zu der vorliegenden Arbeit wurde ich angeregt bei meiner Teilnahme an Untersuchungen, die für die demnächst erscheinende Neubearbeitung der „Ziele der Leuchttechnik“ von O. Lummer erforderlich waren.

Breslau, Physikal. Institut der Universität, Juli 1917.

durch Hrn. Dr. A. R. Meyer, Berlin, in dankenswerter Weise brieflich aufmerksam gemacht wurde. Jene Kurve ist an unpräparierter Kohle gewonnen, für welche seinerzeit unrichtiger Weise die Konstante der präparierten Kohle benutzt wurde.

(Eingegangen 10. August 1917.)



1 Bleiwand. 2 Röntgenröhre. 3 Gundelach sche Ventilröhre. 4 Gasunterbrecher. 5 Quecksilberluftpumpe. 6 MacLeod-Manometer.
7 Versuchsröhr. 8 Standardröhre.





